TD : Continuité

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur $\mathbf{R}$:
   (a) $f(x) = \begin{cases} (1-e^{-x}).ln(1+x^2) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} ln(1+x) \text{ si } x > 0 \\ \frac{x+x^2}{1-x} \text{ si } x \in]-1, 0] \\ 0 \text{ si } x \leqslant -1 \end{cases}$
   (d) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
2. Tracer l'allure de la courbe des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant -1 \\ x+1 \text{ si } -1 < x \leqslant 0 \\ 1-x \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \leqslant 0 \\ x^2 \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$
3. Soit $f(x) = \frac{1}{ln(x)}$.
   (a) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
   f est-elle prolongeable par continuité ?
   (b) Même question avec $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
   On utilisera le résultat admis suivant : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$.
4. Étudier les variations de f sur I et déterminer $f(I)$.
   (a) $f(x) = x^3+x+1$ où $I = \mathbf{R}$, puis $I = \mathbf{R}_+$.
   (b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ où $I =]1, +\infty[$, puis $I = \mathbf{R}_-$.
   (c) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ où $I = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$.
   (d) $f(x) = e^x + 2x - 1$ où $I = \mathbf{R}_+$.
5. On pose $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   (a) Vérifier que f est paire.
   (b) Déterminer les variations de f.
   (c) Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$.
   (d) On note g la restriction f à l'intervalle $\mathbf{R}_+$. Montrer que g est bijective de $\mathbf{R}_+$ dans $g(\mathbf{R}_+)$.
   (e) Tracer le graphe de g sur $\mathbf{R}_+$ sur et de g^{-1} dans un repère.
   (f) Expliciter g^{-1}.
6. On pose $\forall x \in \mathbf{R} : \Lambda(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
   (a) Montrer que Λ est bijective de $\mathbf{R}$ dans $]0, 1[$.
   (b) Expliciter Λ^{-1}.
   (c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $\Lambda(\alpha) = \frac{3}{4}$.
   (d) Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\Lambda(x_0) = x_0$.
7. Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$.
   Montrer que P possède 3 racines distinctes.
8. Soit a un réel. On considère l'équation (E_a), d'inconnue $x > 0$,
   $$\ln(x) = ax.$$
   Etudier, en fonction de la valeur de a, le nombre de solutions de (E_a).

Les exercices qui suivent sont théoriques.

9. Justifier qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine. Est ce le cas d'un polynôme de degré pair ?
10. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, continue sur $[0, 1]$.
    Montrer que : $\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = x_0$.
11. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}_+$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$.
    Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}_+$.
12. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R} : f(x)^2 = 1$.
    Montrer que f est constante.
13. Soit I un intervalle, $k > 0$ et $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant :
    $$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
    Démontrer que f est continue sur I.