

Continuité

Rappel : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f: A \rightarrow B$ une fonction.

On rappelle que A s'appelle l'ensemble de départ (ou encore l'ensemble de définition de f) et B l'ensemble d'arrivée de f . On dit alors que

" f a ses valeurs dans B " si pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$.

Attention cela ne veut pas dire que tous les réels de B sont atteints par f :

par exemple, on peut noter $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou encore $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto x^2$.

Car, en général, on ne sait pas quel est précisément l'ensemble des valeurs prises par f : si on définit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^x + \frac{1}{x} - e^{2x},$$

comment savoir quelles sont toutes les valeurs prises par f , a-t-on par exemple des $x \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $f(x) = 0$?

La détermination de l'ensemble des valeurs prises par f , que l'on note $f(A)$, est un des objectifs de ce chapitre.

Définition : On dit que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est majorée sur A si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, f(x) \leq M. \leftarrow M \text{ ne dépend pas de } x.$$

M est appelé un majorant de f sur A .

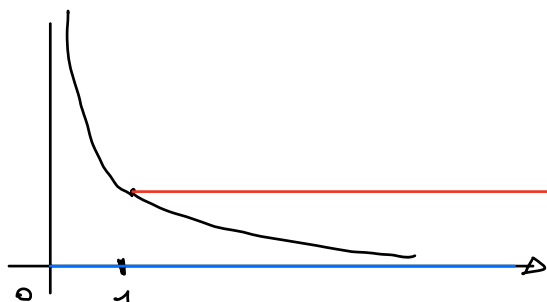
On dit que f est minorée sur A si :

$$\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A, f(x) \geq m. \leftarrow m \text{ ne dépend pas de } x.$$

On dit que f est bornée sur A si elle y est minorée et majorée.

De manière équivalente : f est bornée $\Leftrightarrow |f|$ est majorée.

exemple: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est majorée par 1 sur $[1, +\infty[$ (mais aussi par 2),
elle est minorée par 0 sur $]0, +\infty[$, elle n'est pas majorée sur $]0, 1[$:



$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Théorème (de la limite monotone): Soit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est monotone sur $]a, b[$ alors :

- f admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$.
- Si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ est finie et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ est finie ou égale à $+\infty$.
- Si f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ est finie et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ est finie ou égale à $-\infty$.

Remarque: le théorème a une portée théorique importante mais sera peu utile dans la pratique des exercices.

Définition: Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cela signifie que lorsque x se rapproche de x_0 , $f(x)$ se rapproche de $f(x_0)$.

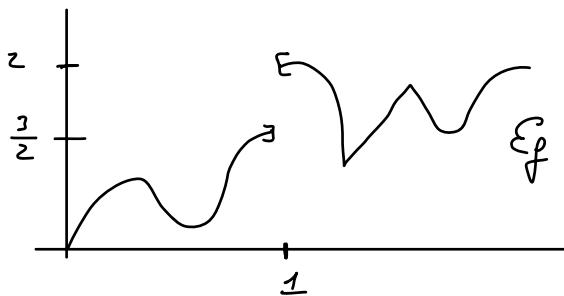
Cela semble aller de soi, mais ce n'est pas toujours le cas :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \neq L(1) = 1: L \text{ est discontinue en } 1.$$

Definition: On dit que f est continue sur une partie A de $\mathbb{R}$ si f est continue en tout point x_0 de A .

Remarque: On dit que la continuité est une propriété locale, notamment, si f est continue sur $] -\infty, 0[$ et continue sur $] 0, +\infty[$, elle l'est sur $\mathbb{R}^*$. Une telle propriété n'est pas vraie pour la monotonie : $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Graphiquement: Une fonction continue a une courbe "continue", elle ne présente pas de "trous".



f semble continue $[0, 1[$ et $] 1, +\infty[$ et discontinue en 1:
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

Definition: Soit $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ est finie, alors on peut prolonger f en une fonction continue sur I en posant $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

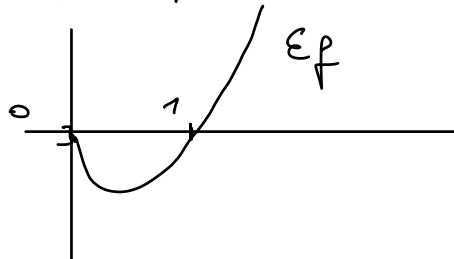
On dit qu'on a prolongé f par continuité sur I .

exemple: $f(x) = x \ln x$ est définie et continue sur $] 0, +\infty[$ ($\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$).

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (par usages comparés) f est prolongée par continuité sur $[0, +\infty[$ en posant $f(0) = 0$.

La fonction prolongée $f: x \mapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est donc définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Graphiquement, une fonction prolongeable par continuité en a est "visuellement" continue :



Théorème : Les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition, à l'exception de $x \mapsto L(x)$ qui n'est continue que sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

- Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I
 - $f+g$ et $f \cdot g$ sont continues sur I
 - $\frac{f}{g}$ est continue sur I sauf là où g s'annule.
- Soient $f: I \rightarrow J$ continue sur I et $g: J \rightarrow K$ continue sur J .
 $g \circ f$ est continue sur I .

exemples : • $f: x \mapsto x^2 + \sqrt{x} + \ln x$ est continue sur $\mathcal{D}f =]0, +\infty[$

• $g: \ln(2x+1)$ est continue sur $\mathcal{D}f =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

car $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto 2x+1$ est

continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$

• $h: x \mapsto \ln(x^2+1) + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}/\{0\}$.

car $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, +\infty[\subset]0, +\infty[$ donc $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Donc h est continue sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Étude de la continuité d'une fonction par morceaux :

• Montrons que $f: x \mapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ e^x - e & \text{si } x < 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de vérifier que les morceaux se "recollent" bien.

En 1: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x - e = e^1 - e = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = \ln 1 = 0$
 Ainsi: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\ = 0 = f(1) \end{cases}$
 donc f est continue en 1.

On conclut en disant que, sur $]1, +\infty[$ $f(x) = \ln(x)$ donc f est continue sur $]1, +\infty[$
 sur $] -\infty, 1[$ $f(x) = e^x - e$ donc f est continue sur $] -\infty, 1[$

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Étudions $h: x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0, +\infty[$.

En 0: Comme h n'est pas définie à gauche de 0, il suffit de calculer:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 = h(0)$ par comparaisons.

donc h est continue en 0, et sur $]0, +\infty[$ $h(x) = x^2 \ln x$
est continue (produit de fonctions usuelles continues)
Donc h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition: Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de limite $l \in \mathbb{R}$.

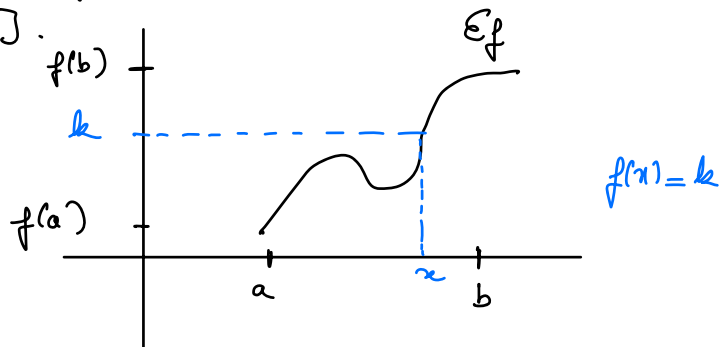
Soit f une fonction continue en l .

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

Remarque: Ce résultat est utile pour obtenir la limite d'une suite
récurrente du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ après que l'on a établi l'existence
de la limite de la suite.

Théorème des valeurs intermédiaires: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
une fonction continue sur $[a, b]$.

Alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un
antécédent par f sur $[a, b]$.



Remarque: f n'ayant pas de "trous" (f est continue), f est
obligée de couper au moins une fois la ligne $y = k$. L'abscisse d'un
point d'intersection fournit alors un antécédent à k par f dans $[a, b]$.

exemple: Soit $f: x \mapsto e^x - 10x$ continue sur $\mathbb{R}$.

On observe que $f(0) = e^0 - 10 \cdot 0 = 1 > 0$ $f(1) = e - 10 < 0$.

Comme 0 est entre $f(0)$ et $f(1)$, alors 0 a au moins un antécédent par f dans $[0, 1]$. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ a des solutions dans $[0, 1]$.

Remarque: Le TVI ne donne ni le nombre de solutions ni l'expression des solutions.

Corollaire: Soit I un intervalle, f continue sur I , alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

Remarques: $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ = "les valeurs prises par f ".

• En général, $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$.

• Si f n'est pas continue, $f(I)$ n'est pas toujours un intervalle:

$f: x \mapsto \lfloor x \rfloor$ $f([0, 2]) = \{0, 1, 2\}$ — pas un intervalle!

Théorème des bornes atteintes: Si f est continue sur un segment $[a, b]$ alors f y admet un maximum et un minimum, notamment f est bornée sur $[a, b]$.

Remarques: Si une hypothèse fait défaut, ce n'est plus toujours vrai:

$f: x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas bornée sur $]0, 1]$

car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (pas de minimum donc). $]0, 1]$ n'est pas un segment.

- En pratique les extremums (maximum ou minimum) se voient sur le tableau de variation.
- $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]1, +\infty[$ est bien bornée (car pour $x \geq 1$: $0 \leq f(x) \leq 1$) mais elle n'a pas de minimum car $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et 0 n'est pas une valeur atteinte par f . $]1, +\infty[$ n'est pas non plus un segment.

Théorème de la bijection: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

continue et strictement monotone sur l'intervalle I .

Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

Autrement dit: $\forall y \in f(I), \exists! x \in I / f(x) = y$.

Notamment $f(I)$ est un intervalle et vaut, si:

- f est croissante:
 - si $I = [a, b]$, $f(I) = [f(a), f(b)]$
 - si $I =]a, b[$, $f(I) =]\lim_{a \rightarrow +} f; \lim_{b \rightarrow -} f[$
- f est décroissante: on échange l'ordre de $f(a)$ et $f(b)$.

exemple: $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} + 1$ sur $I =]0, +\infty[$

f est continue, et: $\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x} < 0$

donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc f

réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) [=]1, +\infty[$.

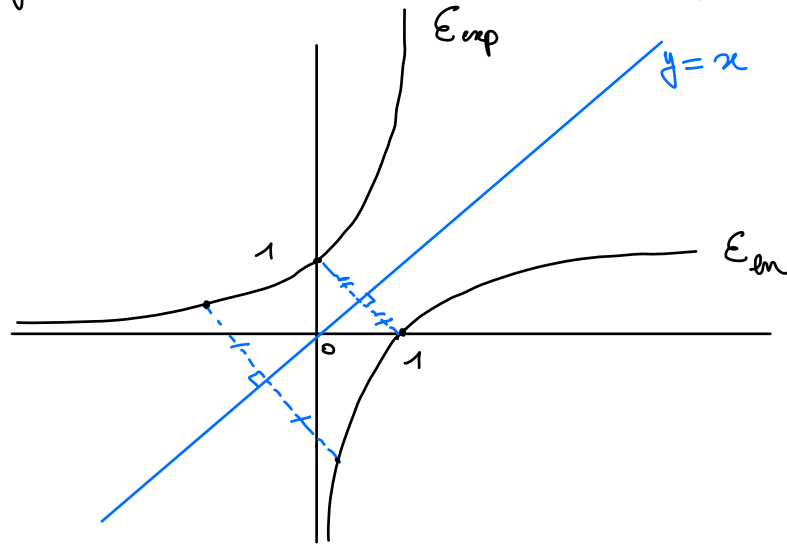
On peut donc affirmer que: $\forall y \in]1, +\infty[, \exists! (x > 0) / \frac{1}{x} + e^{-x} + 1 = y$.

Proposition: Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I .

La bijection réciproque $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ est continue sur $f(I)$ et de même sens de variation que f .

Enfin, $E_{f^{-1}}$ est la symétrique par rapport à l'axe $y=x$ de E_f .

exemple:

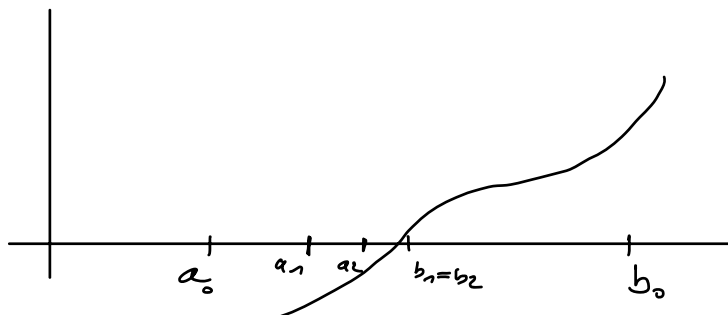


$$\exp^{-1} = \ln$$

Méthode de la dichotomie:

La dichotomie est un algorithme de recherche de valeurs approchées de la solution d'une équation du type $f(x)=0$ dans le cas où on sait qu'il existe déjà une solution $x_0 \in [a, b]$

(on connaît a et b mais pas x_0 , notamment si on sait que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires).



Le principe est le suivant, notons $a = a_0$ et $b = b_0$:

- On commence par calculer $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on regarde le signe, s'il est positif (comme sur le dessin) alors x_0 se trouve sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et on note $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$, s'il est négatif alors $x_0 \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, donc on note $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$.
- On recommence la même procédure avec nos nouvelles a_1 et b_1 .

À chaque étape, on obtient un intervalle 2 fois plus petit que le précédent où se trouve x_0 . Notamment à l'étape n , l'intervalle est de taille $\frac{b-a}{2^n}$. La taille de cet intervalle fournit une estimation de l'erreur d'approximation de x_0 .

En Python, on obtient ceci :

Prenons par exemple $f(x) = x^3 - 2$. On peut démontrer a priori que :

$\exists! x_0 \in [1, 2] \mid f(x_0) = 0$. Ici, donc $a = 1$ et $b = 2$.

$a = 1$

$b = 2$

while $(b-a) > 0.01$: # on veut une valeur approchée à 0.01

if $((a+b)/2)^3 - 2 > 0$:

$b = (a+b)/2$

else:

$a = (a+b)/2$

print(a)

on peut afficher tout réel de $[a, b]$ pour donner une approximation de x_0 à 0.01 près.

Remarque: Il est intéressant de noter que la dichotomie, en plus d'être une méthode pratique d'approximation de la solution, permet de démontrer le TVI : on montre que les suites (a_n) et (b_n) définies de manière algorithmique par récurrence sont adjacentes et que leur limite commune est solution de $f(x) = 0$:

. Soit f continue sur $[a, b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

On définit (a_n) et (b_n) : $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \geq 0$:

$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases} \quad a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 \\ a_n & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $(a_n) \nearrow$ et $(b_n) \searrow$ et que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes, donc ont une limite commune $l \in [a, b]$.

De plus, par construction, $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.

Comme f est continue sur $[a, b]$ donc en l , on peut passer à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(l) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(l) \geq 0$$

Donc $f(l) = 0$.

L'argument de continuité est essentiel pour affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right).$$

Pour une fonction discontinue, cela ne fonctionne pas :

$$\text{Prenons } u_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{n}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\text{Pourtant } \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{n}\right] \right] = [1] = 1 \neq 0.$$

Pas de mystère : L n'est pas continue (à gauche) en 1.