Corrigé Test n°9

Exercice 1

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

1_ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2_ en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$ $\left(\frac{0}{-\infty}\right)$

en 1^- : $\lim\limits_{x \to 1^-} x-1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = -\infty$

en 1^+ : $\lim\limits_{x \to 1^+} x-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

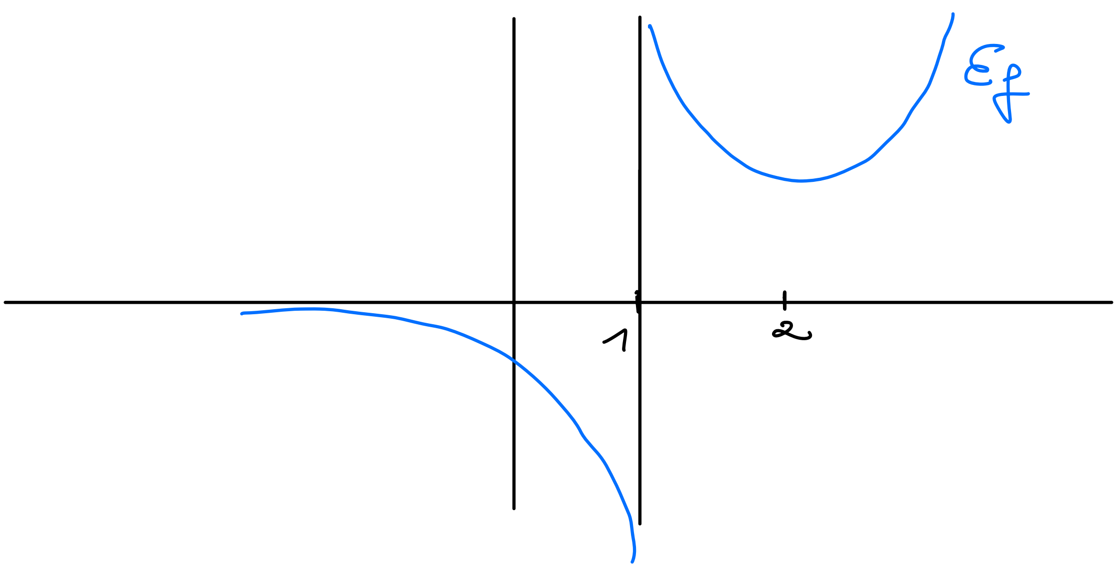
en $+\infty$: $\frac{e^x}{x-1} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}_{\to 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par croissances comparées

3_ $\forall x \neq 1$ $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

Ainsi comme $e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$, $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 2$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

4_



5- D'après 3- f est strictement décroissante et continue (quotient de fonctions continues) sur $]-\infty, 1[$ donc elle est bijective de $]-\infty,1[$ dans $]\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)[$
$=]-\infty, 0[$

6- Comme $-n \in]-\infty, 0[$, n admet un unique antécédent $u_n \in]-\infty, 1[$ par f.

7- On a $f(u_n) = -n$, donc $u_n = f^{-1}(-n)$.

8- Comme f est décroissante alors f^{-1} l'est aussi, donc, vu que:

$-(n+1) \leq -n$

on a $f(-(n+1)) \geq f(-n)$

i.e. $u_{n+1} \geq u_n$

Donc (u_n) est croissante.

et comme $u_n = f^{-1}(-n)$, alors $\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(-n) = 1$.

En effet on a $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ d'où $\lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = -1$.

(Moyen mnémotechnique: $f(1) = -\infty$ donc $1 = f^{-1}(-\infty)$)

9- On a $f(0) = -1 > -2$ et $f(\frac{1}{2}) = -2e^{\frac{1}{2}} < -2$

Ainsi $f(\frac{1}{2}) < -2 < f(0)$ donc $0 < u_2 < \frac{1}{2}$

car f est décroissante sur $]-\infty, 1[$.

10_ C'est l'algorithme de dichotomie

```
a = 0 ; b = 1/2
While b-a > 0.001:
    c = (a+b)/2
    if f(c) > -2
        a = c
    else :
        b = c
print(c)
```

<u>Exercice 2</u> $f(x) = xe^{-x^2}$

Etudions f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$
$= e^{-x^2}(1-2x^2)$

Ainsi $f'(x) \geq 0 \iff 1-2x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \frac{1}{2} \iff -\sqrt{\frac{1}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
	0^*	↘	0	↗	$>$	↘	$0 \; 0^*$

$*$: croissance comparée

(E_1) $f(x) = 0 \iff xe^{-x^2} = 0 \iff x = 0$: une seule solution

(E_2) Comme $f(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = -\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} < 0$ et $f(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}} < 0$

alors $f(x) < 0$ donc E_2 a 0 solution.

(E3) $f(x) = \frac{1}{10}$ a 1 solution dans $]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}[$ et 1 solution dans $[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$.