Jacques Decour

Continuité - Compléments

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1 Dresser le tableau de variations de g.
2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$, avec $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution α. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3 Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4 Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$.
Calculer $f'(x)$ en fonction de g, pour $x \in]-1; +\infty[$.
5 En déduire le signe de f', puis les variations de f sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 2

Considérons la fonction $f: x \longmapsto (x-1)^2$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) :

$$u_0 = \frac{1}{2}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire un programme permettant d'afficher la liste des termes u_0 à u_{10}.
L'exécution de ce programme affiche :
[0.5,0.25,0.562,0.191,0.654,0.12,0.775,0.051,0.901,0.01,0.981]

2. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis établir que [0,1] est stable par f.
3. Démontrer que f possède un unique point fixe sur $[0; 1]$ et le déterminer. On notera α ce point fixe.
Établir de plus que : $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.
4. Représenter l'allure de la courbe de f sur [0,1].
5. Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0; 1]$.
6.a. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \leq \alpha \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq 1$
6.b. Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
6.c. Démontrer que $\ell = 1$. Établir : $\ell' = f(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ'. (u_n) converge t-elle ?

Exercice 3 – Suite via la bijection réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $f(x) = x\ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2 Calculer la limite de f en $+\infty$.
3 Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.
5 On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
a. Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.
b. Donner le tableau de variation complet de la réciproque g^{-1} sur J.
c. Exprimez u_n à l'aide de g^{-1}.
En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 * – Avec un polynôme

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$.

1 Démontrer que P_n possède une seule racine dans $\mathbb{R}_+$, que l'on note u_n.
2 Écrire P sous la forme d'une fraction (pensez à une somme géométrique).
3 Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.
4 Soit $\rho \in]1/2,1[$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} P_n(\rho) > 0$. En déduire que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.