Probabilités conditionnelles et indépendance

On se place dans ce chapitre dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où Ω est un univers composé d'un nombre fini d'issues possibles.

1 _ Probabilités conditionnelles

Définition / Propriété : Soit A un événement (de probabilité non nulle).

On définit la probabilité conditionnelle sachant A par :

$$P_A : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$B \longmapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Cette application est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Preuve :

- Comme $A \cap B \subset A$, $P(A \cap B) \leq P(A)$, donc
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \in [0,1].$$

- $$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

- Si B et C sont deux événements incompatibles :
$$P_A(B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B \cup A \cap C)}{P(A)}$$

comme $A \cap B$ et $A \cap C$ sont aussi incompatibles et que P est une probabilité :
$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C).$$

donc P_B est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Remarque : En pratique on utilise cette notion de 2 manières :

- $P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$
- en interprétant $P_A(B)$ dans le contexte de l'expérience

exemple 1 : On tire successivement et sans remise 2 boules d'une urne en contenant 10 : 8 rouges et 2 bleues. On s'intéresse à A = "on tire les 2 bleues". Posons B_i := "on tire une bleue au $i^{ème}$ tirage" pour $i \in \{1,2\}$.

Ainsi $A = B_1 \cap B_2$ donc $P(A) = P(B_1\cap B_2) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(B_2)$.

formule en cas d'équiprobabilité

$$= \frac{\text{nombre de bleues}}{\text{nombre de boules}} \times \frac{\text{nombres de bleues sachant } B_1}{\text{nombre de boules sachant } B_1}$$

$$= \frac{2}{10} \times \frac{2-1}{9-1} = \frac{1}{45}.$$

Proposition (Formule des probabilités composées) :

Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements ($n \geq 1$) de probabilité non nulle, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2) \cdots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i).$$

Remarque : C'est une généralisation de la définition de $P_B(A)$, en effet pour $n=2$, on obtient $P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)$. La formule se montre donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n=3$, on a $P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)$.

On utilise cette formule pour calculer la probabilité d'événements qui dépendent les uns des autres et qui se succèdent dans le temps.

exemple 2 : On dispose d'un jeu de n clés ($n \geq 2$). On cherche à ouvrir une porte dont on sait qu'une seule clé l'ouvre mais on ne sait pas laquelle est la bonne. On essaie donc une à une les clés. Notons, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

A_i = " on trouve la bonne clé au $i^{ème}$ essai ". On a donc $A_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i$

. $P(A_1) = \frac{1}{n}$ et $P(A_2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(A_2)$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

. Soit $i \geq 2$, $P(A_i) = P(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j} \cap A_i) = \prod_{k=1}^{i-1} P_{\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{A_j}}(\overline{A_k}) \times P_{\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A_j}}(A_i)$ d'après la FPC

$$= \prod_{k=1}^{i-1} \frac{n-(k-1)-1}{\underbrace{n-(k-1)}_{\substack{\text{nombre de clés restantes} \\ \text{après qu'on ait essayé } k-1}}} \times \frac{\overbrace{1}^{\text{il y a 1 bonne clé}}}{\underbrace{n-(i-1)}_{\substack{\text{nombre de clés restantes} \\ \text{après qu'on ait essayé } i-1}}}$$

$$= \underbrace{\prod_{k=1}^{i-1} \frac{n-k}{n-(k-1)}}_{\substack{\text{c'est un produit télescopique :} \\ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{u_k}{u_{k-1}} \text{ où } u_k = n-k}} \times \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{\overbrace{n-(i-1)}^{\text{facteur en } k=i-1}}{\underbrace{n-(1-1)}_{\text{facteur en } k=1}} \times \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

Proposition (Formule des probabilités totales version conditionnelle) :

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements (où $P(A_i) \neq 0$), si B est un événement, alors : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) . P_{A_i}(B)$.

Preuve : On a remplacé $P(A_i \cap B)$ par $P(A_i) P_{A_i}(B)$ dans la formule des probabilités totales.

exemple 1 : On reprend l'exemple 1. Calculons $P(B_2)$ à l'aide du système complet $(B_1, \overline{B_1})$.

$$P(B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})\, P_{\overline{B_1}}(B_2) \quad \text{d'après la FPT.}$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \overbrace{\frac{1}{9}}^{\text{sachant } B_1 \text{, il reste 1 bleue}} + \frac{8}{10} \cdot \overbrace{\frac{2}{9}}^{\text{sachant } \overline{B_1} \text{, il reste 2 bleues}} = \frac{1}{5}$$

Proposition (Formule de Bayes) :

- Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle.

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)\, P(A)}{P(B)}$$

- Soit $(A_1, \dots, A_m)$ un s.c.e (où $P(A_i) \neq 0$ pour $i \in [\![1, m]\!]$)

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)\, P(A_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(A_i)\, P_{A_i}(B)}$$

Remarque : La preuve étant élémentaire : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)\, P(A)}{P(B)}$, il est plus sage de la refaire à chaque fois.

Cette formule permet de renverser les sachant, notamment, lorsque l'on ne connait pas bien $P_B(A)$ mais que l'on connait $P_A(B)$.

exemple 1 : On reprend l'ex 1, cherchons la probabilité d'avoir tiré une bleue en 1ère sachant que l'on a tiré une bleue en 2ème :

on cherche donc $P_{B_2}(B_1) \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{P_{B_1}(B_2)\, P(B_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{9} \times \frac{2}{10}}{1/5} = \frac{1}{9}$.

2 – Indépendance.

Définition : Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Remarque : Pour A et B de probabilité non nulle, A et B indépendants équivaut donc à $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$, ce qui correspond à ce que l'on entend par l'indépendance de A et B : A et B n'ont aucune influence l'un sur l'autre.

⚠ Ne pas confondre avec l'incompatibilité.

exemple 3 : Lançons 2 fois une pièce équilibrée de manière indépendante.

Posons P_i = "obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer", $i = 1, 2$.

P_1 et P_2 sont indépendants et à ce titre $P(P_1 \cap P_2) = P(P_1).P(P_2) = \frac{1}{4}$

mais P_1 et P_2 ne sont pas incompatibles :

$P_1 \cup P_2$ = "obtenir au moins un pile"

Propriété : Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Preuve : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) . P_B(\bar{A}) = P(B).(1 - \underbrace{P_B(A)) = P(B)}_{A \text{ et } B \text{ indep}}(1 - P(A))$

$= P(B) P(\bar{A})$. donc $\bar{A}$ et B indép.

(Si $P(B) = 0$, on a $0 \leq P(\bar{A} \cap B) \leq P(B) = 0$ donc $P(\bar{A} \cap B) = 0 = P(\bar{A}).P(B)$)

Définition : On dit que des évènements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si : $\forall I \subset [\![1, n]\!]$ $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Remarque : Lorsque $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, nul besoin de la FPC pour calculer $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

- En pratique l'indépendance d'évènements est une conséquence de l'indépendance des expériences réalisées : lancer de pièces successifs, tirages avec remise etc.