Lycée Jacques Decour

Révisions CB1

Exercice 1 – Bayes

On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de 0,1% (on parle de faux positif).
  A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test?
  Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

Exercice 2 – Une suite récurrente avec des probabilités

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.
a. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n. On remarquera que (pn) est arithmético-géométrique.
b. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
c. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 3 – Suite récurrente

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1 Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2}{x} - x^2$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
2 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \leq -1$.
3 Étudier les variations de (u_n).
4 En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite (u_n) diverge.

Exercice 4 – Polynôme annulateur

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2I_3 - A$.
b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5 – Calculs d’inverse

Étudier l’inversibilité et calculer l’inverse des matrices suivantes si elles existent.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 – Matrice et probabilité

1 Soient : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.a. Justifier que la matrice Q est inversible puis déterminer Q^{-1}.
1.b. Calculer la matrice QMQ. On notera D la matrice obtenue.
2. On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées et on effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1 , on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3 , on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 2 (s'il en existe), et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.
  On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
- A_n : "obtenir 0 PILE à l'étape n "
- B_n : "obtenir 1 PILE à l'étape n "
- C_n : "obtenir 2 PILE à l'étape n "
  et on note $a_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n), b_n = \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(\mathrm{C}_n)$.
  2.a. Calculer a_1, b_1 et c_1.
  2.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les trois probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}), \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$.
  2.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} c_n \end{cases}$$

  2.d. Que peut-on dire de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? En déduire son terme général.
  2.e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{X}_n = \mathrm{M}^{n-1}\mathrm{X}_1$, où M est la matrice étudiée dans la question 1.
  2.f. En déduire que : $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}$, $\mathbb{P}(\mathrm{C}_n) = \frac{1}{4^n}$