TD : Espaces probabilisés finis

1. Soient $A, B, C, A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un univers Ω.
   Écrire à l'aide des opérations ensemblistes les événements :
   (a) A et B se produisent.
   (b) A et B se produisent mais pas C.
   (c) Au moins un des trois événements A, B ou C se produit.
   (d) Au moins deux des trois événements A, B ou C se produisent.
   (e) Aucun des trois événements A, B et C se produit.
   (f) Un seul des trois événements A, B ou C se produit.
   (g) Tous les événements $A_1, \ldots, A_n$ se produisent.

2. On considère un univers Ω et deux événements A et B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$.
   Calculer $P(\overline{B})$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cup \overline{B})$.

3. Soit un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ et des événements $(A_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$.
   (a) Montrer que $P(A_1 \cup A_2) \leqslant P(A_1) + P(A_2)$.
   (b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* : P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

4. On lance un dé rouge et un dé bleu équilibrés à 6 faces. On pose les

$$\text{événements : } \begin{cases} A = \text{"On obtient 2 fois le même numéro"} \\ B = \text{"La somme des numéros est inférieure ou égale à 3"} \\ R_i = \text{"Le dé rouge donne le numéro } i\text{" où } i \in [\![1,6]\!]. \\ B_i = \text{"Le dé bleu donne le numéro } i\text{" où } i \in [\![1,6]\!]. \end{cases} .$$

   Ici l'univers Ω se modélise par $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$.
   (a) Exprimer A et B à l'aide des R_i et B_i.
   (b) En déduire $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

5. Mon voisin a deux enfants.
   (a) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?
   (b) Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aînée est une fille ?

6. On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un carré d'as ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur ?
   (c) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun roi ?
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux valets ?

7. On range 3 boules dans 8 casiers, chaque casier pouvant contenir de 0 à 3 boules. Quelle est la probabilité que :
   (a) chaque casier contienne au plus une boule ?
   (b) un et un seul casier contienne exactement 2 boules ?
   (c) les trois boules soient rangées dans le même casier ?
   (d) le casier $n°1$ soit vide ?

8. Une urne contient 5 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues. On pioche successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

   On pose : $\begin{cases} A = \text{"On ne tire que des rouges."} \\ B = \text{"On tire une rouge puis une verte puis une bleue."} \\ C = \text{"On tire une seule couleur."} \end{cases}$

   Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

9. Une urne contient n boules noires et une blanche ($n \in \mathbf{N}^*$). On tire successivement sans remise jusqu'à tirer la blanche. On note, pour
   $k \in \mathbf{N}^*$: $A_k =$ "On réalise k tirages".
   (a) Pour quels $k \in \mathbf{N}^*, P(A_k) \neq 0$?
   (b) Calculer $P(A_k)$ pour ces entiers k.
   On pourra poser les événements $N_i =$ "On pioche une noire au $i^{\text{ème}}$ tirage."
   (c) On considère la même expérience mais avec remise.
   Déterminer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

10. On lance une pièce équilibrée. Si on a face, on pioche une boule dans une urne contenant une boule noire et 9 blanches et si on a pile, on pioche une boule dans une urne contenant une noire et une blanche. On note $F =$"On a eu face" et $N=$"On a pioché une noire".
    (a) Donner deux exemples de système complet d'événements.
    (b) Calculer $P(N)$.
    (c) Calculer $P_{\overline{N}}(F)$.

11. On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne numéro k ($k \in [\![1, n]\!]$) contient k boules vertes et $n-k$ boules rouges.
    On choisit d'abord une urne au hasard de manière équiprobable, puis on pioche une boule de l'urne choisie.
    (a) Calculer $P(V_n)$ où $V_n =$"On pioche une verte".
    (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(V_n)$.

12. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés dont la probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{1}{2}$. On prend un dé au hasard et on obtient 6.
    Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

13. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient une boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ... , n boules numérotées n.
    (a) Combien y a t-il de boules dans l'urne ?
    (b) On tire une boule dans l'urne. Calculer $P($"On pioche un numéro k"$)$ où $k \in [\![1, n]\!]$.
    (c) On suppose que n est pair. Calculer $P($"piocher un numéro pair"$)$ et $P($"piocher un numéro impair"$)$.

14. On dispose d'une pièce qui donne Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. On lance la pièce successivement jusqu'à l'un des deux événements suivants :
    - Obtenir Pile.
    - Obtenir n fois Face.
    On pose, pour $k \in \mathbf{N}^*, P_k =$"On a eu pile au $k^{\text{ème}}$ lancer" et $T_k =$"On a effectué en tout k lancers".
    (a) Calculer $P(T_k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
    (b) Calculer $P(T_n)$.
    (c) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(T_k) = 1$.
    (d) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} kP(T_k) = \frac{1-(1-p)^n}{p}$.

15. Une urne contient b ($b \in \mathbf{N}^*$) boules blanches et r ($r \in \mathbf{N}^*$) boules rouges. On tire n ($n \in \mathbf{N}^*$) en remettant la boule si elle est rouge et en ne la remettant si elle est blanche.
    Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.