L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1 – Généralités.

Dans toute cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 1.

Définition : $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de réels. On appelle ces n-uplets des vecteurs.
Étant donné deux vecteurs $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, et λ un réel, on définit une addition et une multiplication externe :

- $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n$ (Loi additive interne)
- $\lambda x=(\lambda x_1,\dots,\dots,\lambda x_n)\in\mathbb{R}^n$ (Loi multiplicative externe)

Propriété : Les propriétés algébriques de ces 2 lois sont les mêmes que celles sur les réels :

- $x+y=y+x$ (commutativité)
- $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (distributivité)
- $x+y+z=x+(y+z)=(x+y)+z$ (associativité).

Remarque : On ne multiplie pas les vecteurs entre eux : xy n'a aucun sens pour $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Définition : Soient $u_1,\dots,u_k$ k vecteurs ($k\in\mathbb{N}^*$) de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\dots,u_k$ tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_k u_k \quad \text{où } \lambda_1,\dots,\lambda_k \text{ sont des réels.}$$

On note $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ l'ensemble de ces combinaisons linéaires.

exemple : Soit $u=(1,0)$ et $v=(2,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$2u-v=(0,-1)$; $3u=(3,0)$; $-v=(-2,-1)$ sont des combinaisons linéaires de u et v. Ils appartiennent donc à $\mathrm{Vect}(u,v)$.

Propriété : Soient $u_1,\dots,u_k,u_{k+1}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Si $u_{k+1}\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$ alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k,u_{k+1})=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)$.

Remarque: Cela signifie que lorsqu'on identifie, à l'intérieur d'un Vect, un vecteur combinaison linéaire des autres, on peut le retirer du Vect sans changer l'ensemble.

exemple: $\mathrm{Vect}(\underbrace{(1,0,1)}_{u_1};\underbrace{(1,1,1)}_{v_2};\underbrace{(0,0,0)}_{v_3};\underbrace{(2,1,2)}_{v_4})$

$= \mathrm{Vect}((1,0,1);(1,1,1))$ car $v_3 = 0v_1$ et $v_4 = v_1+v_2$

Notons que le vecteur $(0,0,0)$ (qu'on appelle vecteur nul) est toujours une combinaison linéaire de n'importe quels vecteurs.

Définition: On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $(v_1,\dots,v_k)$.

exemple: La famille $((2,0);(1,0);(0,1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car le vecteur $x=(3,2)$ se décompose de plusieurs manières dans cette famille :

$(3,1) = 1.(2,0)+1.(1,0)+2(0,1) = 0.(2,0)+3(1,0)+2(0,1).$

La famille $((2,1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car le vecteur $x=(1,0)$ ne se décompose pas dans cette famille : on a jamais $(1,0)=\lambda(2,1)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

Pour avoir une base, il faut 2 ingrédients :

- que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ puisse s'obtenir à partir de combinaisons linéaires des vecteurs de la famille.
- que chaque vecteur ne se décompose que d'une seule façon.

Définition / Propriété: La famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ où, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots 0)$: le 1 est en $i^{\text{ème}}$ position

est une base de $\mathbb{R}^n$ qu'on appelle base canonique.

exemple: $((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

__exemple :__ Montrons que $\mathcal{E} = (\overbrace{(1,0)}^{u} ; \overbrace{(1,1)}^{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On va donc montrer que pour tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique décomposition dans $\mathcal{E}$. C'est-à-dire que l'équation $(x,y) = \alpha u + \beta v$ a une unique solution $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$X = \alpha u + \beta v \iff (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(1,1)$$

$$\iff (x,y) = (\alpha + \beta, \beta)$$

$$\iff \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x - \beta = x - y. \\ \beta = y \end{cases}$$

Ainsi, $(x,y) = (x-y)(1,0) + y(0,1)$ et cette décomposition est unique.

Donc $\mathcal{E} = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

__L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:__ On définit les mêmes notions sur l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.

__exemple :__ La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2_ Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Définition: On appelle sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tout ensemble F pouvant s'écrire sous la forme $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ où $v_1, \dots, v_k$ sont k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

exemple: $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$\{(0, \dots, 0)\} = \mathrm{Vect}((0, \dots, 0))$ en est aussi un.

exemple/méthode: Soit $F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \text{ et } x+2y+3z=0 \}$

On étudie F de la manière suivante : soit $(x,y,z) \in F$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

[on va chercher à résoudre ce système linéaire

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

[Le système est triangulaire

on exprime y en fonction de z et on remonte]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2z+z=0 \Leftrightarrow x=z \\ y=-2z \end{cases}$$

on met les informations du système

Ainsi $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) = (z, -2z, z)$

$= z(1,-2,1)$.] ceci est une C.L. du vecteur $(1,2,-1)$.

Donc $F = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

exemple 2: Soit $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y=0 \}$.

$(x,y) \in G \Leftrightarrow x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$

Donc $(x,y) \in G \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} \mid (x,y) = (-2y, y) = y(-2,1)$

donc $G = Vect((-2,1))$

exemple 3 : Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - z + 2t = 0\}$

$(x,y,z,t) \in H \iff x - z + 2t = 0 \iff x = z - 2t$

Donc $(x,y,z,t) \in H \iff \exists\, y,z,t \,/\, (x,y,z,t) = (z-2t, y, z, t)$

$= y(0,1,0,1) + z(1,0,1,0) + t(-2,0,0,1)$

Donc $H = Vect((0,1,0,1); (1,0,1,0); (-2,0,0,1))$.

Définition : Soient $u_1, \dots, u_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $F = Vect(u_1, \dots, u_k)$, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est génératrice de F et on dit que F est engendré par la famille $(u_1, \dots, u_k)$.

exemples : Dans les 3 exemples : $((1,-2,1))$ est génératrice de F, $((-2,1))$ est génératrice de H, $((0,1,0,1); (1,0,1,0); (-2,0,0,1))$ est génératrice de G.

Remarque : Il y a plusieurs familles génératrices possibles, en pratique la famille va dépendre de la façon dont vous avez résolu votre système linéaire.

Définition : Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'une famille $(v_1, \dots, v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de F si tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_k)$

Théorème : Les bases d'un sous espace vectoriel F ont toutes le même nombre de vecteurs.
On appelle ce nombre la dimension de F, notée $\dim F$.

Remarque : . Les bases de $\mathbb{R}^n$ ont donc toutes n vecteurs (autant que la base canonique).
. Si $F = \{0\} = Vect(0)$. On note $\dim F = 0$.

Définition : On dit qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_k)$ est libre si :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

Autrement dit une famille est libre si la seule combinaison linéaire annulant la famille $(u_1,\dots,u_k)$ et la combinaison obtenue en mettant des réels nuls.

Si la famille n'est pas libre on dit qu'elle est <u>liée</u>.

<u>Méthode</u> : Pour étudier la liberté d'une famille, on procède ainsi :

- Si la famille ne possède qu'un seul vecteur :
  elle est libre si et seulement le vecteur est non nul.
- Si la famille possède 2 vecteurs :
  elle est libre si et seulement si les vecteurs ne sont pas proportionnels
- Si la famille $(u_1,\dots,u_k)$ a plus de 2 vecteurs, on pose les réels $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ vérifiant $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0$, et on résout le système qui en résulte :
  la famille est libre si et seulement si le système admet comme unique solution $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

<u>exemple 1:</u> Soit $\mathcal{F} = ((2,0);(-1,0))$

$\mathcal{F}$ est liée car $(2,0)$ et $(-1,0)$ sont proportionnels $[(2,0) = -2.(-1,0)]$.

<u>exemple 2:</u> Soit $\mathcal{F} = ((1,2,0,6))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$ car $(1,2,0,6) \neq 0$.

<u>exemple 3:</u> Soit $\mathcal{F} = ((1,0);(2,1);(3,2))$

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ des réels tels que $\alpha_1(1,0)+\alpha_2(2,1)+\alpha_3(3,2) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 4\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

Ce système possède des une infinité de solutions donc la famille est liée

(toute solution de ce système fournit une C.L, par exemple $\alpha_3 = 1$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_1 = 1$

donne lieu $1(1,0) - 2(2,1) + (3,2) = (0,0)$).

<u>exemple 4:</u> Soit $\mathcal{H} = ((3,0,1);(2,0,1);(1,1,1))$

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ des réels : $\alpha_1(3,0,1) + \alpha_2(2,0,-1) + \alpha_3(1,1,1) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\iff} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

donc $\mathcal{H}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition: Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

- Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre de p vecteurs de F alors c'est aussi une base de F.
- Les familles libres de F ont au maximum p vecteurs.
- Les familles génératrices de F ont au minimum p vecteurs.

Remarque: Ainsi toute famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est également une base de $\mathbb{R}^n$. C'est la proposition la plus importante de ce cours et c'est elle qui justifie l'étude systématique des sous espaces vectoriels.

exemple: . Dans l'exemple 4, $\mathcal{H}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\mathcal{H}$ est une famille libre de 3 vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

. La famille $\mathcal{G} = ((2,1); (-3,0))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ car les deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc c'est également une base de $\mathbb{R}^2$ (car $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2).

Proposition: Soient $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs et F un sous espace vectoriel. $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de F si et seulement $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et génératrice de F.

Remarque: Ainsi lorsque $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Pour connaître la dimension de F, on étudie la liberté de $(u_1, \dots, u_k)$. Si la famille est libre alors $\dim F = k$, sinon c'est que un ou plusieurs des vecteurs de $(u_1, \dots, u_k)$ sont des C.L. des autres. Ainsi, on peut retirer ces derniers vecteurs du Vect sans changer F et ce jusqu'à obtenir une famille libre.

<u>exemple :</u> Soit $F = \mathrm{Vect}(\underbrace{(3,0,1)}_{u}; \underbrace{(1,1,1)}_{v}; \underbrace{(2,-1,0)}_{w}; \underbrace{(-1,-1,-1)}_{x})$

comme $x = -v$ et $w = u - v$, $F = \mathrm{Vect}((3,0,1);(1,1,1))$, et u et v ne sont pas colinéaires donc (u,v) est libre donc elle est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F, donc $\dim F = 2$.

Définition : Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle rang de la famille l'entier :
$$rg(u_1,\dots,u_k) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)).$$

<u>Remarque :</u> Le rang d'une famille est donc le nombre de vecteurs libre de la famille.

<u>exemples :</u>
$$rg((2,0,1,0);(1,1,1,1)) = 2$$
$$rg((3,1,3);(1,-1,1);(4,0,4)) = 2$$
$$rg((2,2);(1,1);(-1,1)) = 2$$
$$rg((0,0,0,0)) = 0$$

Définition : • Soit $B = (u_1, \dots, u_p)$ une base d'un sous espace F et $x \in F$.
On appelle <u>coordonnées de x dans B</u> la liste des réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ dans la décomposition de x dans B :
$$x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p.$$
• Si on représente ces coordonnées par une matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbb{R})$, on obtient la matrice de x dans la base B, notée $\mathrm{Mat}_B(x)$.

<u>exemple :</u> Considérons $B_1 = ((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1))$ et

$B_2 = ((1,0,0);\ (1,1,0);\ (1,1,1))$ deux bases* de $\mathbb{R}^3$.

Prenons par exemple $x = (2,1,3)$.

on a $\quad x = 2(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 3(0,0,1)$] décomposition dans B_1

$\quad x = 1(1,0,0) + (-2)(1,1,0) + 3(1,1,1)$] décomposition dans B_2

donc $\underset{B_1}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\underset{B_2}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

*: On peut démontrer que B_2 est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre car elle possède 3 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Proposition: Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Si $\dim F = n$ alors $F = \mathbb{R}^n$.

Zoom sur l'espace $\mathbb{R}^2$:

$\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 donc les sous espaces de $\mathbb{R}^2$ sont de dimension :

- 0, dans ce cas, on a affaire au sous espace nul $\{0\}$.
- 2, dans ce cas on a affaire à $\mathbb{R}^2$ lui-même.
- 1, dans ce cas le sous espace F s'écrit $F = \mathrm{Vect}((a,b))$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, c'est une droite qui passe par $(0,0)$: