TD : L'espace vectoriel $\mathbf{R^n}$

1. Donner une famille génératrice des sous espaces vectoriels suivants :
   (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0\}$.
   (b) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x = 2y\}$.
   (c) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x - t = 2y,\ 3z - x = 0\}$.
   (d) $I = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0,\ 2x + y = 0,\ z = 0\}$.

2. Montrer que les familles suivantes sont libres :
   (a) $\mathcal{F} = \{(-1, 0); (2, -4)\}$.
   (b) $\mathcal{G} = \{(1, 2, -4, 0)\}$.
   (c) $\mathcal{H} = \{(2, 0, 2); (0, 4, -1); (1, 1, 1)\}$.

3. Donner une base des sous espaces vectoriels suivants :
   (a) $F = Vect((1, 0); (2, 1))$.
   (b) $G = Vect((1, 0); (2, 0); (-1, 0))$.
   (c) $H = Vect((1, 0, 0); (1, 1, 1); (0, 4, -1))$.
   (d) $I = Vect((1, 1, 1, 1); (-1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, 1))$.

4. On pose $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.
   (a) Que vaut $\dim(F)$ où $F = Vect(u, v)$?
   (b) Montrer que $w = (1, 4, 7) \in F$ et calculer ses coordonnées dans la base (u, v) de F.
   (c) Calculer les coordonnées dans (u, v) des vecteurs : $u,\ u + v,\ -4u$,
   $(-2, 0, 2)$ et $(1, 0, -1)$.

5. On considère (u, v, w) une base de $\mathbf{R}^3$.
   Posons $u' = u + 2v,\ v' = u + w$ et $w' = 2u + 2v + 2w$.
   (a) Montrer que (u', v', w') est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Calculer les coordonnées de u, v et w dans (u', v', w').

6. Soit $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n / \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.
   (a) Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
   (b) En notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, vérifier que :
   $\forall i \in [\![2, n]\!], e_1 - e_i \in H$.
   (c) Montrer que $\dim(H) = n - 1$.

7. Considérons le système linéaire d'inconnue (x, y, z, t)

$$S : \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ x - 3z + 2t = 0. \end{cases}$$

   Justifier que l'ensemble E des solutions du système S est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 2 .

8. Calculer le rang des familles suivantes :
   $\mathcal{F}$: $(2, 1, -1), (0, 1, 2), (6, 1, -7)$ dans $\mathbf{R}^3$
   $\mathcal{F}'$: $(1, 2, -1, 1)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(2, 3, -3, 1)$, $(-1, 0, 3, 1)$ dans $\mathbf{R}^4$.

9. Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$?
   (a) $\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 / a + b = 2\}$.
   (b) $\{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 / a = b,\ c - d = a\}$.
   (c) $\{(u, v)) \in \mathbf{R}^2 / u^2 + v^2 = 1\}$.
   (d) $\{(u, v)) \in \mathbf{R}^2 / u^2 + v^2 = 0\}$.