TD : Dérivabilité

1. Etudier la dérivabilité de chaque fonction là où elles sont définies.
   (a) $f : x \longmapsto e^{-x}\sqrt{x}$
   (b) $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$
   (c) $f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$
   (d) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$
   (e) $f : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x - x & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$

2. Déterminer si les fonctions suivantes sont de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.
   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$,où $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$,où $D_f = [0, +\infty[$.
   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$,où $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$.
   (d) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) \text{ si } x \geqslant 0 \\ x \text{ si } x < 0 \end{cases}$,où $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$

3. Tracer la courbe des fonctions suivantes en faisant apparaître la tangente (si elle existe) au point d'abscisse $x = 0$.
   (a) $f(x) = e^{2x}$ sur $\mathbf{R}$.
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
   (c) $f(x) = x - \ln(x+1)$ sur $]-1, +\infty[$.

4. Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{J}$ que l'on déterminera.
   (a) $f(x) = x^3$ où $\mathbf{I} = \mathbf{R}$.
   (b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ où $\mathbf{I} =]0, 1]$.
   (c) $f(x) = e^x - x + \ln(x)$ où $\mathbf{I} =]0, +\infty[$.
   (d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ où $\mathbf{I} = \mathbf{R}$.

5. On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2) \end{cases}$

   On pose $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [1, 2] : f(x) \in [1, 2]$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N} : 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} : |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
   (e) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N} : |u_n - \sqrt{2}| \leqslant (\dfrac{1}{2})^n$.
   (f) Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

6. On définit la fonction f par : $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0,1]$. On le note λ.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1] : f(x) \in [0,1]$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [0,1] : |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} : u_n \in [0,1]$.
   (e) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} : |u_{n+1} - \lambda| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|$.
   (f) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N} : |u_n - \lambda| \leqslant (\dfrac{1}{\sqrt{e}})^n$ et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.

7. Démontrer les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in]-1,+\infty[: \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) $\forall x \geqslant 0 : e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
   (c) $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$ pour tout $x \geq 0$.

8. Calculer :
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ où $\alpha > 0$
   (c) Les limites de : $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}, x \longmapsto \frac{e^x-1}{x^2}, x \longmapsto \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ et $x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$ en 0 .

9. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   où $\forall x \in \mathbf{R}_+ : f(x) = \sqrt{1+x}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et que ses termes appartiennent à $[0,2]$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,2] : |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique réel $r \in [0,2]$ tel que $f(r) = r$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - r|$.
   (e) Prouver que (u_n) converge et déterminer sa limite.

10. Soit f une fonction deux fois dérivable et paire sur $\mathbf{R}$. Etudier la parité éventuelle de f' et f''.