Dérivabilité

1_ Généralités

Définition: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si :
$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

Dans ce cas on note le nombre dérivé en a $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque: On peut de manière équivalente chercher $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$.
La quantité $\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de f entre x et a.
La limite quand x tend vers a, lorsqu'elle existe, correspond à l'accroissement ponctuel au point a.

exemple: Regardons $f(x) = x^2+1$ sur $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 + 1 - (a^2+1)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$.

Donc $f'(a) = 2a$.

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite en a et on note $f_d'(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- Si $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à gauche en a et on note $f_g'(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque : Lorsque la fonction étudiée n'est définie que d'un côté de a, l'une de ses dérivées n'a pas de sens, par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de dérivée à gauche en 0.

Proposition : f est dérivable à droite et à gauche en a et $f_d'(a) = f_g'(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.

Le cas échéant $f_d'(a) = f'(a) = f_g'(a)$.

Remarque : On s'intéresse à ces dérivées lorsqu'on a affaire à une fonction définie en plusieurs morceaux ou lorsque le signe va être différent à droite et à gauche :

exemple : Soit $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Étudions la dérivabilité en 0.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

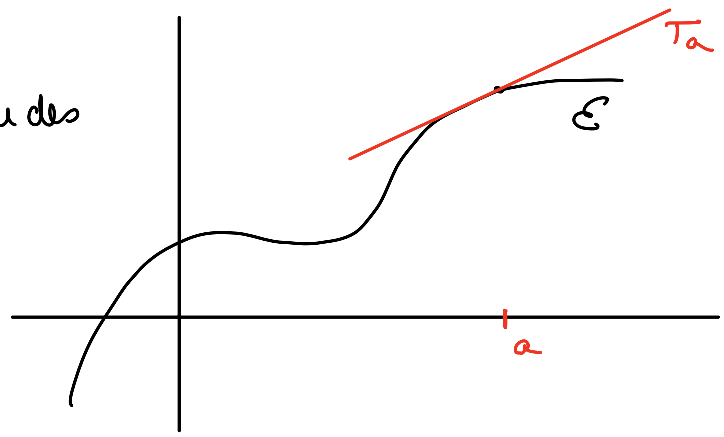
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

donc $f_d'(0) = 1 \neq f_g'(0) = -1$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Définition : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a, on dit que la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse $x = a$ d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Remarque : La tangente en a à la courbe de f est la droite qui "touche" la courbe au point d'abscisse $x = a$ et, qui au voisinage de a, se confond avec la courbe.

Les tangentes permettent de donner des approximations des courbes par des droites.



- Noter que le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente.

  La tangente en a est la droite de même "direction" que $\mathcal{E}_f$ et qui la touche en a.
- Quand on s'éloigne du point d'abscisse a, la tangente et la courbe n'ont plus grand chose à voir.

Proposition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve : Soit $x \neq a$, $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)}(x-a) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)(a-a) = 0$ car f est dérivable en a

donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, donc f est continue en a.

exemple 1 : Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur $[0, +\infty[$

Etudions la dérivabilité en 0 (donc en 0^+ car f n'est pas définie à gauche de 0) :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \ln h}{h} = h \ln h$$

donc $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ par croissances comparées.

Donc f est dérivable en 0 ($f'(0)=0$) et f est donc continue en 0.

__exemple 2:__ La réciproque est fausse : $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

__Définition:__ Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I.

On a alors une nouvelle fonction $f' : \begin{array}{l} a \longmapsto f'(a) \\ I \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$: la dérivée de f.

__Définition:__ Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ ou $-\infty$, alors on dit que la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse $x=a$.

__Exemple:__ $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$

mais la courbe admet une tangente verticale d'équation $x=0$.

2_ Dérivées usuelles.

__Proposition:__ Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $f+g$ est dérivable et $(f+g)' = f'+g'$] Linéarité de la dérivation
- λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$
- fg est dérivable et $(fg) = f'g + fg'$
- $\frac{1}{f}$ est dérivable là où f ne s'annule pas et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
- $\frac{f}{g}$ est dérivable là où g ne s'annule pas et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ f^n est dérivable et $(f^n)' = n . f' . f^{n-1}$

Proposition :

Fonctions : $f(x)=$	Dérivées : $f'(x)=$	Domaine de dérivabilité
$\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n, n\in\mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\underline{\underline{]}}0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Proposition : Soit $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I et J respectivement.
$g\circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x\in I,\quad (g\circ f)'(x) = f'(x).\, g'(f(x)).$$

Proposition :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$e^{u(x)}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	domaine de u
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	là où $u(x)>0$
$u(x)^n, n\in\mathbb{N}^*$	$n\, u'(x) . u(x)^{n-1}$	domaine de u

Remarque : Retenons que toutes les fonctions usuelles du programme sont dérivables là où elles sont définies sauf :

- $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0,+\infty[$
- $x \longmapsto |x|$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{Z}$ car non continue sur $\mathbb{Z}$.

3_ Etudes de fonctions dérivables

Théorème (des accroissements finis) : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $|f'|$ est majorée par un réel k sur $]a,b[$ alors :
$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|$.

Remarque : Ce théorème nous servira en pratique pour les études de suites récurrentes.

Proposition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I où I est un intervalle.

- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.
- Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.

Proposition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I où I est un intervalle.

- Si f' est positive sur I
- Si f' ne vaut 0 qu'en un nombre fini de points

} Alors f est strictement croissante sur I.

exemple : Si $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x \geq 0$ et s'annule seulement en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement $\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

<u>Remarque</u> : On a le résultat plus général suivant :

soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.

si f est dérivable sur I sauf en un nombre fini de points et que sa dérivée est strictement positive alors f est strictement croissante sur I.

<u>exemple</u> : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

⚠ On prendra garde à n'utiliser ces résultats que sur des <u>intervalles</u>.

En effet, $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ par exemple a une dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^*$ mais elle n'est strictement décroissante que sur $]-\infty,0[$ d'une part et sur $]0,+\infty[$ d'autre part (la simple observation de sa courbe suffit pour voir qu'elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$).

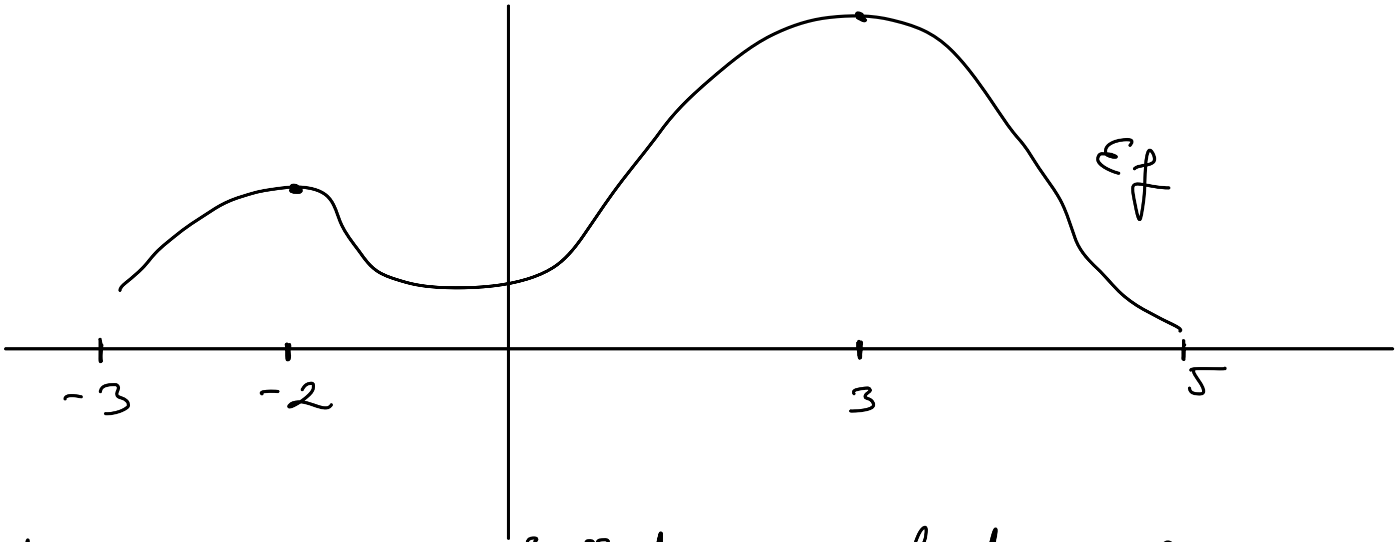
<u>Définition</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

- On dit que f possède un maximum en x_0 sur I si :

  $\exists x_0 \in I \mid \forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0)$.

- On dit que f possède un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle J contenant x_0 tel que f admet un maximum en x_0 sur J.
- On définit de même les notions de minimum et de minimum local.

Dans l'un ou l'autre cas, on parle d'<u>extremum</u> (local ou non).



f admet un maximum en $x=3$ sur $[-3,5]$ et un maximum local en $x=-2$.

<u>Proposition</u>: Soit $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I.
Si f' s'annule en $x_0 \in I$ en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

<u>Remarque</u>: Le changement de signe de f' traduit un changement de sens de variation, donc une "bosse" au niveau de la courbe.

<u>Définition</u>: Soit $f: I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur I si
- f est dérivable sur I
- f' est continue sur I.

<u>Remarque</u>: En pratique, nous rencontrerons peu de fonctions étant dérivable mais pas de classe C^1. Mais, si on demande de montrer qu'une fonction est de classe C^1, on n'oubliera pas de prouver, en plus de la dérivabilité, la continuité de f'.

• **Méthode** : démontrer une inégalité à l'aide des dérivées :

exemple : Montrons que : $\forall x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.

Posons $g(x) = x - \ln(1+x)$, montrons alors que $g(x) \geq 0$.

g est dérivable et : $\forall x > -1$ $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

donc on a les variations de g :

x	-1		0		$+\infty$
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g'(x)$		$-$		$+$	

donc g admet un minimum sur $]-1,+\infty[$ en $x=0$ qui vaut $g(0) = 0 - \ln 1 = 0$.

Donc : $\forall x > -1$, $g(x) \geq 0 \iff \forall x > -1$ $x \geq \ln(1+x)$.

• **Méthode** : Calculs de limites

Proposition : On a les limites suivantes qui lèvent les formes indéterminées :

- $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$
- $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$
- $\lim\limits_{X \to 0} \frac{(1+X)^\alpha - 1}{X} = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve : Posons $f(t) = e^t$; $g(t) = \ln(1+t)$; $h(t) = (1+t)^\alpha$.

- $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{f(0+X) - f(0)}{X} \xrightarrow[f \text{ est dérivable en } 0]{} = f'(0) = e^0 = 1$.

- $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{g(0+X) - g(0)}{X} \xrightarrow[g \text{ est dérivable en } 0]{} = g'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

- $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{(1+X)^{\alpha} - 1}{X} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{h(0+X) - h(0)}{X} \underset{h \text{ est dérivable en } 0}{=} h'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha.$

<u>exemples:</u> • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{-2x} = 1$ (car $-2x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$)

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times (-2) = 1 \times (-2) = -2$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x = 1 \times 0 = 0$

⚠ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \neq 1$ car ici $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

donc on ne peut pas considérer $\frac{1}{x}$ comme $X \to 0$.