Corrigé du Test 6

②

ⓐ $\mathcal{F} = \{(1,2,1) ; (2,1,2) ; (1,0,1)\}$

Soient a,b,c des réels tels que : $a(1,2,1)+b(2,1,2)+c(1,0,1) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases} \underset{L_3-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a+2b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Le système a une infinité de solutions : $\boxed{\mathcal{F} \text{ est liée.}}$

ⓑ $\mathcal{G} = \{(1,1) ; (1,2) ; (11,12)\}$.

$\mathcal{G}$ est une famille de $\mathbb{R}^2$, or $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = 3 > 2$ donc $\boxed{\mathcal{G} \text{ est liée}}$

ⓒ $\mathcal{H} = \{\overset{u}{(2,0,2,1,2)} ; \overset{v}{(4,0,4,2,4)}\}$

$\mathcal{H}$ contient deux vecteurs colinéaires ($v = 2u$) donc $\mathcal{H}$ est liée.

ⓓ $\mathcal{I} = \{(1,2,3,4) ; (2,3,4,5) ; (0,0,0,1) ; (0,0,1,0)\}$

Le test de liberté donne le système :

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+3b=0 \\ 3a+4b+d=0 \\ 4a+5b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ -b=0 \quad L_2-2L_1 \\ 3a+4b+d=0 \\ 4a+5b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{I} \text{ est libre}}$

③ ⓐ $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \dim \operatorname{Vect}[\overbrace{(1,1)}^{u} ; \overbrace{(2,2)}^{v} ; \overbrace{(0,0)}^{w}]$ or $v = 2u$ et $w = 0$

$= \dim \operatorname{Vect}[(1,1)] = \boxed{1}$ car $(1,1) \neq 0$

ⓑ $\operatorname{rg} \mathcal{G} = \dim \operatorname{Vect}[\overbrace{(1,0,1)}^{u} ; \overbrace{(-1,0,1)}^{v} ; \overbrace{(0,0,2)}^{w}]$ or $u+v=w$

$= \dim \operatorname{Vect}[(1,0,1) ; (-1,0,1)] = \boxed{2}$ car u et v non colinéaires.

④ ⓐ $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ vu en TD !

$= \operatorname{Vect}[\underbrace{(1,0,\dots,0,-1) ; (0,1,0,\dots,0,-1) ; \dots ; (0,\dots,1,-1)}_{\mathcal{A}}]$

On a vu que $\mathcal{A}$ est libre en TD donc $\boxed{\dim A = \operatorname{Card}(\mathcal{A}) = n-1}$.

ⓑ $(x_1, \dots, x_n) \in B \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n-1} = -x_1 - \dots - x_{n-2} \\ x_n = 0 \end{cases}$

2 équations et n inconnues : il reste $\underline{n-2}$ inconnues

Ainsi $(x_1, \dots, x_n) = x_1(1,0,\dots,-1,0) + \dots + x_{n-2}(0,\dots,1,-1,0)$

Donc $B = \operatorname{Vect}[\underbrace{(1,0,\dots,-1,0) ; \dots ; (0,\dots,1,-1,0)}_{\mathcal{B}}]$

Vérifions que la famille génératrice $\mathcal{B}$ de B est libre avec un calcul qui donne :

$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ -\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-2} = 0 \end{cases}$ donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-2} = 0$. $\mathcal{B}$ est libre donc $\boxed{\dim B = n-2}$

① ⓐ $(x,y) \in F \iff 2x+3y=0 \iff y = -\frac{2}{3}x$

Ainsi $F = \text{Vect}\left(\left(1, -\frac{2}{3}\right)\right)$

D'où $\boxed{\dim F = 1}$ car $\left(1, -\frac{2}{3}\right) \neq (0,0)$.

ⓑ $(x,y) \in G \iff \begin{cases} x+2y=0 \\ -\frac{1}{2}x - y = 0 \end{cases} \underset{L_2+\frac{1}{2}L_1}{\iff} \begin{cases} x+2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \{x=-2y$

Donc $G = \text{Vect}((-2,1))$ donc $\boxed{\dim G = 1}$ car $(-2,1) \neq (0,0)$.

ⓒ $(x,y,z) \in H \iff -2x-3y+2z=0 \iff x = -\frac{3}{2}y+z$

Ainsi $(x,y,z) = y\left(-\frac{2}{3},1,0\right) + z(1,0,1)$

Donc $H = \text{Vect}\Big(\underbrace{\left(-\frac{2}{3},1,0\right);(1,0,1)}_{\mathcal{H}}\Big)$

Or $\mathcal{H}$ contient 2 vecteurs non proportionnels donc $\mathcal{H}$ est libre donc $\boxed{\dim H = 2}$

ⓓ $(x,y,z,t) \in I \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+3z+2t=0 \end{cases} \underset{L_2-2L_1}{\iff} \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -x-4y+z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = -x-y-z = 3y-2z \\ x = -4y+z \end{cases}$

Ainsi $(x,y,z,t) = y(-4,1,0,3) + z(1,0,1,-2)$

Donc $I = \text{Vect}[(-4,1,0,3);(1,0,1,-2)]$

et comme les 2 vecteurs sont non colinéaires : $\boxed{\dim I = 2}$