**TD : Applications linéaires**

1. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
   (a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$
   (b) $\begin{array}{rcl} g:\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x, x+y+z, y-z) \end{array}$
   (c) $\begin{array}{rcl} h:\mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^3 \\ x & \mapsto & (x,2x,0) \end{array}$
   (d) $\begin{array}{rcl} u:\mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (a,b,c,d) & \mapsto & (c+a, b-d) \end{array}$
   (e) $\begin{array}{rcl} v:\mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^n \\ (x_1,x_2,\dots,x_n) & \mapsto & (x_n,x_{n-1},\dots,x_1) \end{array}$
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de chacune des applications de l'exercice 1. *Penser à vérifier vos résultats en appliquant le théorème du rang.*
3. Déterminer les matrices dans les bases canoniques des espaces $\mathbf{R}^k$ pour chacune des applications de l'exercice 1.
4. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes bijectifs de $\mathbf{R}^n$ où $n \in \mathbf{N}^*$ :
   (a) $\begin{array}{rcl} f:\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-2y, \frac{1}{2}x+y) \end{array}$
   (b) $\begin{array}{rcl} F:\mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$
   (c) $\begin{array}{rcl} F:\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z-y, x+y, x+y+z) \end{array}$
   (d) $\begin{array}{rcl} F:\mathbf{R}^4 & \to & \mathbf{R}^4 \\ (a,b,c,d) & \mapsto & (a, a+b, a+b+c, a+b+c+d) \end{array}$
5. Déterminer le rang des matrices suivantes :
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \\ 6 & 2 & 14 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (k) $I_n$ (l) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. On définit : $\begin{array}{rcl} f:\mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0, 3x, 2x-y) \end{array}$.
   (a) Expliciter la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique $\mathbf{R}^3$.
   (b) Calculer $A^3$. En déduire $f^3$.
   (c) Montrer que $rg(f) = 2$.
7. On définit : $\begin{array}{rcl} f:\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} g:\mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$.
   (a) Expliciter les matrices $A$ et $B$ de $f$ et $g$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
   (b) Calculer $AB$ et $BA$. En déduire les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$.
8. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Expliciter l'application linéaire canoniquement associée à M. Donner son noyau et son rang.