TD : Dérivabilité *

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} \text{ si } x \in \left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\end{cases}$
   1 Étudier la continuité de f en 0 et en 1.
   2 Déterminer les limites suivantes :
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)-1}{x} \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)}{x-1}$ et interpréter les résultats obtenus.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\text{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   1 Étudier la parité des fonctions sh et ch.
   2 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{ch}\,(x))^2 - (\text{sh}\,(x))^2 = 1$.
   3 a) Étudier les variations de la fonction sh. Dresser le tableau de variations de sh. En déduire le signe de sh.
   b) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.Dresser le tableau de variations de sh^{-1}.
   c) Calculer l'expression de sh^{-1}. (*On sera amené à identifier un trinôme*).
   4 a) Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$vers $[1;+\infty[$, on notera f la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$.
   b) Déterminer l'expression de f^{-1} *(même chose que 3c)*

3. On considère la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
   1 Montrer que f est continue sur [0,1], en déduire que f admet un maximum et un minimum.
   2 Étudier la dérivabilité de f en 1.
   3 Calculer $f(0)$, en déduire la valeur du minimum de f.
   4 Étudier les variations de f et en déduire la valeur du maximum.

4. Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :
   1 $f(x) = xe^x$.
   2 $f_n(x) = \frac{x^n}{x-1}$
   3 $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ *(On écrira $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$).*

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$ avec P_n un polynôme de degré n vérifiant $P_{n+1}(x) = (x^2+1)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$. Exprimer le coefficient dominant de P_n en fonction de n. Pour cela on fera une récurrence.

6. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{x}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[- \{0\}$ et $f(0) = 0$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (Penser à la quantité conjuguée).

7. Soit $f(x) = (\ln\, x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x > 0$ et x^2 si $x \leq 0$. Continuité, dérivabilité en 0 ?