Corrigé Test 11

① $g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

ⓐ • sur $]-\infty, 0[$ g est de classe C^1 en tant que polynôme

- sur $]0, +\infty[$ g est de classe C^1 comme produit de fonctions C^1 (polynôme et ln)

. Dérivabilité en 0 : soit $h > 0$ $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = h \ln h \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ par C.C

soit $h < 0$ $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = h \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Comme f est dérivable en 0 elle est aussi continue en 0

Bilan : $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}}$

ⓑ Il reste à vérifier la continuité de f' en 0 (car on a montré que f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$f'(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x \ln x + x \overset{\text{par C.C}}{=} 2 \cdot 0 + 0 = 0$

Donc f' est continue en 0 : $\boxed{f \text{ est donc de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

ⓒ f est dérivable en -1, 0 et 1 donc les tangentes existent et voici leurs équations :

T_{-1} : $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ $\quad T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\quad T_1$ $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -2x - 1$ $\qquad\qquad y = 0$ $\qquad\qquad y = x - 1$

Sens de variation de f ? sur $]-\infty, 0]$ $f'(x) \leq 0$

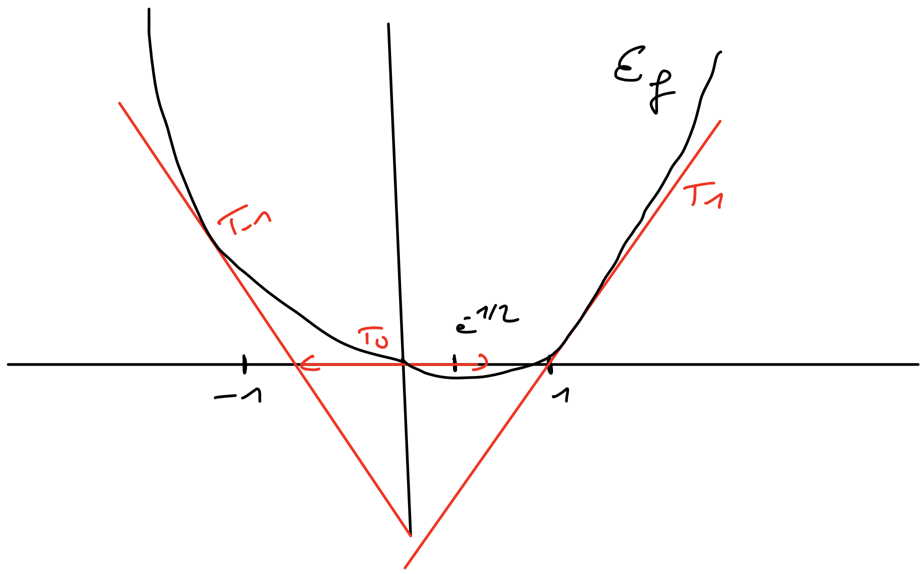
sur $]0,+\infty[$ $f'(x) = 2x\ln x + x$

$\forall x > 0$

Ainsi $f'(x) \geq 0 \iff 2\ln x + 1 \geq 0$

$\iff x \geq e^{-1/2}$.

Limites ? Sans aucune forme indéterminée, on a $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.



② ⓐ $f(x) = x^2e^x + \dfrac{x+1}{x^2-1} = x^2e^x + x - 1$

donc $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x + 1 = xe^x(2+x) + 1$.

ⓑ $g(x) = x^2e^x\ln x$

donc $g'(x) = 2x\,e^x\ln x + x^2\left(e^x\ln x + e^x \cdot \dfrac{1}{x}\right)$

$= e^x\left(2x\ln x + x^2\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

ⓒ $h(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\ln x + 1}$ donc $h'(x) = \dfrac{2\frac{1}{x}\ln x\,(\ln x+1) - (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2} = \dfrac{\ln x(\ln x - 2)}{x(\ln x+1)^2}$

③ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ e^{1/\ln x} & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

ⓐ En 0^+ : Soit $h > 0$ $\quad \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{e^{1/\ln h} - 1}{h}$

$$= \frac{e^{1/\ln h} - 1}{1/\ln h} \times \frac{\ln h}{h}$$

Or, quand $h \to 0^+$, $\dfrac{1}{\ln h} \to 0$ donc tend vers 1 (forme $\dfrac{e^X - 1}{X}$, $X \to 0$)

et $\dfrac{\ln h}{h} \to -\infty$. Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

. On a $\lim\limits_{x \to 0} e^{1/\ln x} = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

ⓑ En 1 : $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} e^{1/\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} e^{1/\ln x} = +\infty$

donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 1, \text{ donc a fortiori pas dérivable en } 1.}$