Exercices pratiques de dérivation

Consigne : ***dérivez chacune des expressions le nombre de fois que c'est indiqué****. Pour chacune d'elle,* ***précisez le domaine de dérivabilité*** *(je rappelle, c'est le même que le domaine de définition sauf pour la fonction racine carrée et valeur absolue en 0).*

1. Facile

$a)$ $e^x \ln\ x$ une fois
$b)$ $\frac{1}{x+1}$ une fois
$c)$ $\frac{2}{1-x} + e^{4x+1}$ une fois
d) $\ln\,(x^2 + x + 1)$ deux fois
$e)$ $\frac{1}{1+e^x}$ deux fois

2. Plus technique

$a)$ $\sqrt{x}$ trois fois
b) $\ln(e^x + 1)$ deux fois
c) $\ln\left(e^{x^2+x} + 1\right)$ une fois
$d)$ $(1 + x^2)^7$ deux fois
$e)$ $e^x \ln\ x \cdot \sqrt{x}$ une fois
$f)$ $e^{-\sqrt{x}}$ deux fois

3. Maths Approfondies uniquement

a) $\cos\,(x)$ 14 fois
b) $\cos^2\,(x)$ deux fois
$c)$ $\tan(x)$ deux fois
d) $\sin\left(\ln\,(x^2 + 1)\right)$ une fois
$e)$ $\tan(\cos x)$ une fois

4. Donner une formule pour la dérivée n-ième de chaque fonction.

$a)$ $\frac{1}{x}$
$b)$ $\ln\,(1 + x)$
$c)$ $\ln\,(1 - x)$
d) $e^{\alpha x}$ où α u réel non nul.
$e)$ $\frac{1}{1-x^2}$ (décomposer le quotient en une somme avant)

$f)$ $x^n \ln\,(x)$

1 _ a _ $(e^x \ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

$$\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x x - e^x}{x^2}.$$

b _ $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{-1}{(x+1)^2}$

c _ $\left(\frac{2}{1-x} + e^{4x+1}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2} + 4e^{4x+1}$

d _ $\left(\ln(x^2+x+1)\right)' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

e _ $\left(\frac{1}{1+e^x}\right)' = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

$$\left(\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\right)'' = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x . 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{-e^x - e^{2x} + 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^{2x} - e^x}{(1+e^x)^3}$$

2 _ a _ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{\;'\;} -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{x\sqrt{x}} \xrightarrow{\;'\;} -\frac{3}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

b- $\ln(e^x+1) \xrightarrow{'} \dfrac{e^x}{e^x+1} \xrightarrow{'} \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} .$$

c- $\left(\ln\left(e^{x^2+x}+1\right)\right)' = \dfrac{(2x+1)\, e^{x^2+x}}{e^{x^2+x}+1} .$

d- $\left((1+x^2)^7\right)' = 2x \times 7 \times (1+x^2)^6$

$\left(14x(1+x^2)^6\right)' = 14\,(1+x^2)^6 + 14x \times 2x \times 6\,(1+x^2)^5$

$= (1+x^2)^5\left(14(1+x^2) + 168\,x^2\right)$

e- $(\underbrace{e^x \ln x}_{u}\, \underbrace{\sqrt{x}}_{v}) = (\underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\ln x}_{v})' \sqrt{x} + \dfrac{e^x \ln x}{2\sqrt{x}}$

$$= \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)\sqrt{x} + \frac{e^x \ln x}{2\sqrt{x}}$$

f- $\left(e^{-\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow{'} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\right) e^{-\sqrt{x}}\right)$

$$= \frac{e^{-\sqrt{x}}}{4x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

3 – a. $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{x^{n+1}}(-1)^n$

$$\ln(1+x)^{(n)} = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$$

$$\ln(1-x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

$$\left(e^{\alpha x}\right)^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$ (le vérifier !)

donc $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n!}{(1-x)^n} + \frac{n!\,(-1)^n}{(1+x)^n}\right)$

$$x^n \ln x \xrightarrow{\prime} n x^{n-1} \ln x + \frac{x^n}{x} = x^{n-1} n \ln x + x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\prime} n(n-1)\, x^{n-2} \ln x + (n-1) x^{n-2}$$

donc $(x^n \ln x)^{(n)} = n! \ln x + n!$