

Applications linéaires

1 - Compléments sur les matrices

Definition: Soit $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. On appelle noyau de A , noté $\ker A$, le sous-espace vectoriel : $\{X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX=0\}$.

Remarque: C'est les solutions d'un système linéaire homogène.

exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-2z = 5x \\ z = -3x \end{cases}$$

donc $X = \begin{pmatrix} x \\ 5x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\ker A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AX=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 3y=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=y=0$ donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\ker A = \{0\}$.

Definition: Soit $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. On note $(A_1, \dots, A_p)$ les colonnes de A :

$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. On définit le rang de A :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1, \dots, A_p) (= \dim \text{Vect}(A_1, \dots, A_p)).$$

exemple: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ est de rang 2 ; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3 ; $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 1.

Proposition: Soit $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$. $\text{rg}(A) = \text{rg}(^tA)$.

Remarque: A moins on peut chercher le rang des colonnes ou des lignes pour trouver $\text{rg}(A)$.

Théorème (du rang): Soit $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$.

$$\underbrace{p}_{\text{nombre de colonnes}} = \dim \ker(A) + \text{rg}(A)$$

Proposition: Soit $A \in M_m(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

A est inversible ssi $\text{rg}(A) = m$

ssi $\ker A = \{0\}$.

2 - Les applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition: Soit $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. On dit que f est une application linéaire si:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

exemple 1. Soit $f: (x, y) \longmapsto x + 2y$
 $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Prenons $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f((x + \lambda x', y + \lambda y')) = x + \lambda x' + 2(y + \lambda y') \\ &= x + 2y + \lambda(x + 2y') = f(x, y) + \lambda f(x', y') \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

• Soit $h: (x, y, z) \longmapsto (x - y, 2z)$
 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Prenons $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(u + \lambda v) &= h((x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')) = (x + \lambda x' - (y + \lambda y'), 2(z + \lambda z')) \\ &= (x - y + \lambda(x' - y'), 2z + \lambda 2z') \\ &= (x - y, 2z) + \lambda(x' - y', 2z') = h(u) + \lambda h(v). \end{aligned}$$

donc h est linéaire.

Definition: Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, on note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Si $n=m$, on note simplement $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et on dit que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Proposition: Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ alors:

- $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$
- $\forall (u_1, \dots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p : f(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(u_i)$

Definition: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On définit:

- $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$
- $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Proposition: $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Remarque: On note $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$.

exemple: Reprenons f de l'exemple 1. Déterminons $\ker f$:

$$\text{Soit } (x, y) \in \ker f \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$$

$$\text{Ainsi } (x, y) = (-2y, y) = y(-2, 1) \text{ donc } \ker f = \operatorname{Vect}((-2, 1)).$$

Proposition: Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

exemple: Reprenons f de l'exemple 1. Déterminons $\operatorname{Im} f$.

Prendons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, ainsi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(1, 0); f(0, 1)) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})_{\substack{2=2 \times 1}} \\ &= \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

(On rappelle que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ et a pour base canonique $e_1 = 1$)

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

- f est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$.
- f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = \mathbb{R}^m$

Remarque: Notons que si F est un ser de $\mathbb{R}^m$, $F = \{0\}$ si $\dim F = 0$.
On a également que si F est un ser de $\mathbb{R}^m$, $F = \mathbb{R}^m$ si $\dim F = m$.

Théorème (du rang): Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

$$m = \dim \ker f + \text{rg}(f) \quad (\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f).$$

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ (donc $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire)

- Si f est injective alors f est bijective.
- Si f est surjective alors f est bijective.

Remarque: Dans le cas où l'espace de départ est identique à l'espace d'arrivée, on peut donc se contenter d'étudier le noyau ou l'image pour montrer qu'une application est bijective.

exemple: Soit $f: (x, y) \mapsto (x+y, 2x-y)$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Montrons que f est bijective:

$$\text{Soit } (x, y) \in \ker f \Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{Donc } \ker f = \{(0, 0)\}.$$

donc f est injective ($\ker f = \{0\}$) donc f est aussi bijective (car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$).

Vocabulaire: Pour un endomorphisme linéaire, on parle d'automorphisme.

Proposition: Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.

$$\bullet \quad g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$$

Proposition: Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}^m$, alors f^{-1} est également une application linéaire de $\mathbb{R}^m$.

exemple: Soit $f: (x, y) \mapsto (x+y, 2x+y)$. On vérifie aisément que f est linéaire. Montrons que f est bijective et calculons f^{-1} :

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on résout $f(x, y) = (a, b)$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow (x+y, 2x+y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ 2x+y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x=b-a \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=b-a \\ y=a-x=2a-b \end{cases} \quad \text{Donc } f^{-1}: (a, b) \mapsto (b-a, 2a-b)$$

On remarque bien que f^{-1} est aussi linéaire.

3 - Lien avec les matrices

Définition: Soit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire.

On définit la matrice canoniquement associée à f comme la matrice $A \in M_{p,m}(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne ($j \in [1,p]$) est la matrice des coordonnées dans $\mathbb{R}^p$ du vecteur $f(e_j)$ (où $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le 1 est en $j^{\text{ième}}$ position).

exemple: Soit $f: (x,y) \mapsto (x+y, x-y, 2x)$ une application linéaire.
 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

On calcule $f((1,0)) = (1, 1, 2)$ ici $e_1 = (1,0)$

$f((0,1)) = (-1, -1, 0)$ ici $e_2 = (0,1)$

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

En pratique pour calculer la matrice canoniquement associée, il s'agit donc simplement de trouver en colonne les vecteurs ligne $f(e_i)$.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ et A sa matrice canoniquement associée.

Soit $u \in \mathbb{R}^m$ et X la matrice coordonnées de u dans la base canonique.

Alors AX est égale à la matrice coordonnées de $f(u)$ dans la base canonique.

exemple: Reprenons $f: (x,y) \mapsto (x+y, x-y, 2x)$ de l'exemple précédent.
Comme $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Si on veut calculer $f(\overbrace{(2,1)}^u)$, on

peut calculer $A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 1 \\ 2 \times 1 - 4 \times 1 \\ 2 \times 2 + 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Ainsi $f(2,4) = (6, -2, 4).$

Proposition: . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et A sa matrice canoniquement associée .

. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$ et B sa matrice canoniquement associée .

Alors la matrice canoniquement associée de $g \circ f$ est égale à BA .

Remarque: Notamment si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ est carrée . On peut donc remarquer que $A^2 = A \cdot A$ est la matrice canoniquement associée à $f \circ f$. On peut montrer aussi que A^{-1} (lorsqu'elle existe) est la matrice canoniquement associée à f^{-1} (lorsque f est bijectif) . Les considérations seront détaillées en 2^{ème} année .