Équations différentielles linéaires

Dans ce cours, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction dérivable sur I.

Définitions : On appelle équation différentielle toute équation faisant intervenir y et ses dérivées successives. On appelle ordre de l'équation l'ordre de dérivation maximal de y apparaissant dans l'équation.

- On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b \qquad \text{où } a_n, \dots, a_1, a_0, b \text{ sont des fonctions continues sur } I.$$

où l'inconnue à déterminer est la fonction y.

- Par convention, on place tout ce qui dépend de y à gauche et le reste à droite. Lorsque le membre de droite est nul on parle d'équation différentielle homogène.
- Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions y vérifiant l'équation.

exemples : Soit (E) : $y' - y = e^x$ sur I. La fonction $y : x \mapsto x e^x$ est solution car $y' - y = x e^x + e^x - x e^x$.

On peut en trouver d'autres : $y : x \mapsto (x-2) e^x$ par exemple.

Soit (E) : $y' + y^2 = \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Cette équation n'est pas linéaire, et elle est d'ordre 2.

Théorème (de structure des solutions) : Soit (E) : $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b$ une EDL (équation différentielle linéaire).

On note S_E ses solutions et S_H les solutions de l'ED homogène associée : $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$.

On note y_p une solution particulière de (E). On a alors :

$$S_E = \{ y_p + y_H \ / \ y_H \in S_H \}$$

Preuve: Par double inclusion. Soit $y \in S_E$, on a donc $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b$, comme $y_p \in (E)$ on a

$y - y_p \in S_H$, en effet: $a_n (y-y_p)^{(n)} + \dots + a_0 (y-y_p) = \underbrace{a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y}_{\text{linéarité de la dérivation}} - (a_n y_p^{(n)} + \dots + a_0 y_p) = b - b = 0$

Ainsi $y = y_p + \overbrace{y - y_p}^{\in S_H}$.

. Soit $y \in \{ y_p + y_H \,/\, y_H \in S_H \}$. Vérifions que $y_p + y_H \in S_E$:

$$a_n (y_p+y_H)^{(n)} + \dots + a_0 (y_p + y_H) = \underbrace{a_n y_p^{(n)} + \dots + a_0 y_p}_{\text{linéarité de la dérivation}} + \underbrace{a_n y_H^{(n)} + \dots + a_0 y_H}_{y_p \in S_E \text{ et } y_H \in S_H} = b + 0 = b$$

Remarque: Ce théorème signifie qu'il suffit de trouver une solution particulière et toutes les solutions de l'équation pour résoudre entièrement une équation différentielle linéaire.

Proposition (Principe de superposition des solutions): Soient $(E_1): a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b$ et $(E_2): a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = c$ deux EDL ayant le même membre de gauche.

Si $(E_3): a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b + c$ et $y_1 \in S_{E_1}$ et $y_2 \in S_{E_2}$ alors $y_1 + y_2 \in S_{E_3}$.

Preuve: $a_n (y_1+y_2)^{(n)} + \dots + a_0 (y_1+y_2) = b+c$ par linéarité de la dérivation.

Exemple: On peut donc trouver une solution particulière de $(E): 3y' + xy = 3x^2 + e^x$ en cherchant des solutions de $3y' + xy = 3x^2$ et $3y' + xy = e^x$ séparément et en additionnant les solutions trouvées.

Remarque: Lorsque l'on ajoute une solution particulière de l'équation homogène associée à une solution, on obtient encore une solution. Par ailleurs toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène donne encore une solution de l'équation homogène. Notons l'analogie avec les systèmes linéaires.

Définition : On appelle EDL d'ordre 1 à coefficients constants :

$ay' + by = c$ où a, b sont des réels ($a \neq 0$) et c une fonction continue

On se ramènera à l'équation normalisée :

$$y' + \frac{b}{a} y = \frac{c}{a} .$$

Théorème : Soit (E) : $y' + ay = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

$$S_E = \{ y : x \longmapsto \lambda e^{-ax} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Preuve : Soit $y \in S_E$. Posons $h : x \longmapsto e^{ax} y(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = a e^{ax} y(x) + e^{ax} y'(x) = e^{ax}(a y(x) + y'(x)) = e^{ax} \cdot 0 = 0$

h est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc h est constante : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \lambda$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda = e^{ax} y(x)$ donc $y(x) = \lambda e^{-ax}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \lambda e^{ax}$, donc $y'(x) + a y(x) = -a\lambda e^{-ax} + \lambda a e^{ax} = 0$ donc $y \in S_E$.

exemples : . (E) : $y' + y = 0$ $\quad S_E = \{ y : x \longmapsto \lambda e^{-x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

. (E) $y' = 0$ $\quad S_E = \{ y : x \longmapsto \lambda e^{-0x} = \lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

. Soit (E) : $y' + 2y = 3$. On va résoudre (E) :

L'équation homogène (E_0) : $y' + 2y = 0$ a pour solutions $\{ y : x \longmapsto \lambda e^{-2x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$

(E) admet comme solution particulière, par exemple, $y : x \longmapsto \frac{3}{2}$ (car $y' + 2y = 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$)

Ainsi d'après le théorème de structure : $S_E = \{ y : x \longmapsto \frac{3}{2} + \lambda e^{-2x} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Propriété : L'EDL $y' + ay = b$ admet comme solution particulière : $x \longmapsto \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$ et $x \longmapsto bt$ si $a = 0$.

Preuve : Si $a \neq 0$, $(\frac{b}{a})' + a \frac{b}{a} = 0 + b = b$. Si $a = 0$ $(bt)' + 0 \cdot bt = b$.

$a \in \mathbb{R}$
b fonction continue

Théorème (de Cauchy) : Le problème avec condition initiale (dit problème de Cauchy) : $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ($y(x_0) = y_0$: la condition initiale)

admet une unique solution.

Preuve : Considérons l'équation homogène associée $y' + ay = 0$. On sait que les solutions sont les fonctions de la forme $y_\lambda : x \longmapsto \lambda e^{-ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons une fonction z dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons alors la fonction $y : x \longmapsto z(x) y_\lambda(x)$. Cette fonction est solution de $y' + ay = b$ si

$$(z(x)y_\lambda(x))' + a z(x) y_\lambda(x) = b(x) \text{ si } z'(x)y_\lambda(x) + y_\lambda'(x) z(x) + a z(x) y_\lambda(x) = b(x)$$

$$\text{si } z'(x) y_\lambda(x) + z(x) \underbrace{(y_\lambda'(x) + a y_\lambda(x))}_{=0} = b(x)$$

$$\text{si } z'(x) \lambda e^{-ax} = b(x)$$

$$\text{si } z'(x) = \frac{1}{\lambda} e^{ax} b(x)$$

On $x \longmapsto e^{ax} b(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives, notons z une primitive. Ainsi $x \longmapsto z(x) y_\lambda(x)$ est solution de $y' + ay = b$. En choisissant le réel λ convenablement, la solution vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

exemple : Résolvons $\begin{cases} y' + 2y = 3x + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

- L'équation homogène admet comme solutions $\{ x \longmapsto \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$
- Une solution particulière est $y : x \longmapsto \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$, en effet, $(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4})' + 2(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}) = 3x + 1$.

D'après le théorème de structure, les solutions de $y' + 2y = 3x + 1$ sont $\{ y : x \longmapsto \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

Vu que l'on souhaite $y(0) = 2$, on veut $\frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} + \lambda e^{-2 \cdot 0} = 2 \iff \lambda = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

Ainsi la seule solution est $y : x \longmapsto \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} e^{-2x}$.

Définition: On appelle EDL d'ordre 2 à coefficients constants toute équation de la forme :

$$y'' + ay' + by = c \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \text{ est une fonction continue.}$$

On appelle équation caractéristique associée l'équation :

$$\underbrace{x^2 + ax + b}_{\text{On note } \Delta \text{ le discriminant de ce trinôme}} = 0 \qquad \text{d'inconnue } x \text{ réel.}$$

Théorème : Soit (E) : $y'' + ay' + by = 0$ une EDL d'ordre 2, homogène, à coefficients constants.

Si $\Delta = 0$, en notant r l'unique racine de x^2+ax+b, on a $S_E = \{x \longmapsto \lambda e^{rx} + \mu . x e^{rx} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les 2 racines de x^2+ax+b, on a $S_E = \{x \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Preuve: Traitons le cas $\Delta > 0$.

. Soit une fonction de la forme $y : x \longmapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$. On a donc :

$$(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})'' + a(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})' + b(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

$$= \lambda r_1^2 e^{r_1 x} + \mu r_2^2 e^{r_2 x} + a\lambda r_1 e^{r_1 x} + a\mu e^{r_2 x} + b\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

$$= \lambda e^{r_1 x}\underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0 \text{ car } r_1 \text{ racine de } x^2+ax+b} + \mu e^{r_2 x}\underbrace{(r_2^2 + ar_2 + b)}_{=0 \text{ car } r_2 \text{ aussi racine}} = 0 \quad \text{Donc } y \text{ est solution.}$$

. On admet que ce sont les seules solutions possibles.

Proposition: Soit (E) : $y'' + ay' + by = c$ où a, b, c sont des réels.

. Si $b \neq 0$, $y : x \longmapsto \frac{c}{b}$ est une solution particulière

. Si $b = 0$ et $a \neq 0$, $y : x \longmapsto \frac{c}{a}x$ est une solution particulière

. Si $b = a = 0$, $y : x \longmapsto c\frac{x^2}{2}$ est une solution particulière.

Preuve: Immédiat. D'ailleurs, il est plus sage de trouver des solutions particulières de tête plutôt que d'apprendre par cœur ces 3 formules.

Théorème (de Cauchy) : Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$ où a, b, x_0, y_0, z_0 sont des réels et c une fonction continue admet une unique solution.

exemple : On va résoudre $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 3 \\ y(0) = 1 \; ; \; y'(0) = 0 \end{cases}$.

. Les solutions de l'équation homogène sont $\{ y : x \longmapsto \lambda e^x + \mu x e^x \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

. Une solution particulière est $y : x \longmapsto 3$ car $(3)'' + 2(3)' + 3 = 3$.

Donc d'après le théorème de structure les solutions sont $\{ y : x \longmapsto 3 + \lambda e^x + \mu x e^x \;/\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

On souhaite $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = \end{cases}$ donc $\begin{cases} 3 + \lambda e^0 + \mu \cdot 0 e^0 = 1 \\ \lambda e^0 + \mu (e^0 + 0 e^0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 2 \end{cases}$

Donc la seule solution est $y : x \longmapsto 3 - 2e^x + 2xe^x$.

exemple : Que faire si une solution particulière ne saute pas aux yeux ?

Posons (E) : $y'' + y' - y = x^2 - 1$.

Cherchons une solution y de la forme $y : x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ où α, β, γ des réels à déterminer.

y est solution ssi : $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)'' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = x^2 - 1$, pour tout réel x

on regroupe selon les coef du polynôme

i.e. $2\alpha + 2\alpha x + \beta - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = x^2 - 1$

i.e. $(-\alpha) x^2 + (2\alpha - \beta) x + 2\alpha + \beta - \gamma = x^2 - 1$

par identification des coefficients d'un polynôme

i.e $\begin{cases} -\alpha = 1 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$

Ainsi la fonction $y : x \longmapsto x^2 + 2x + 3$ fournit une solution particulière de $y'' + y' - y = x^2 - 1$.

Remarque : Il est sage de vérifier rapidement au brouillon si la solution fonctionne bien.

En général la forme de la solution particulière sera indiquée dans les exercices.

Définition : On appelle trajectoire la courbe d'une solution d'une ED.

On dit qu'une trajectoire est un équilibre si la solution associée est une fonction constante.

On dit qu'une trajectoire est convergente si la solution associée admet une limite finie en $+\infty$.

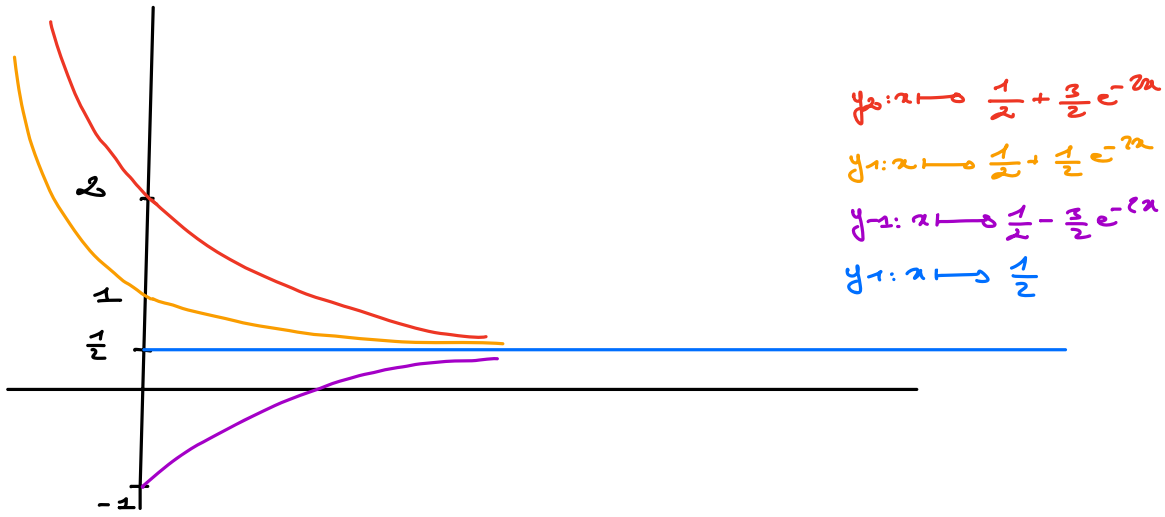
exemple : Soit (E) : $y' = y(2-y)$ une ED (notons qu'elle n'est pas linéaire).

On peut remarquer que les fonctions $y : x \mapsto 2$ et $y : x \mapsto 0$ sont des solutions et que ce sont des fonctions constantes. Elles fournissent donc deux trajectoires d'équilibres.

Remarque : Dans la pratique, si une trajectoire est convergente (i.e. $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \ell \in \mathbb{R}$) alors le réel ℓ est une trajectoire d'équilibre. Ce constat, qui n'est pas un résultat de cours, est utile pour vérifier la cohérence de vos résultats.

exemple : Soit $y' + 2y = 1$.

Les solutions sont : $\left\{ y : x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^{-2x} \;/\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Il n'y a qu'une seule trajectoire d'équilibre : $y : x \mapsto \frac{1}{2}$, et on constate ici que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + \lambda e^{-2x} = \frac{1}{2}$.