TD : Equations différentielles

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y' = y$
   (b) $2y = 3y'$
   (c) $y' - y + 1 = 0$
   (d) y'+1=0

2. On considère $(E) : 2y' = 3y + 9$.
   (a) Donner les solutions de l'équation homogène associée.
   (b) Donner l'ensemble des solutions de (E) en utilisant une fonction constante.
   (c) Trouver l'unique solution vérifiant $y(-1) = 1$.
   (d) Tracer cette trajectoire. Converge t-elle ?

3. On considère $(E) : y' - y - 5(t+1)e^{2t} - 3 = 0$.
   (a) Résoudre l'équation homogène associée.
   (b) Trouver une solution particulière de : $y' - y = 3$.
   (c) Trouver une solution particulière de $y' - y = 5(t+1)e^{2t}$ de la forme $y(t) = (at+b)e^{2t}$ où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ à déterminer.
   (d) En déduire une solution particulière de (E).
   (e) Résoudre (E) et donner la solution qui s'annule en 1.

4. Résoudre $3y' = -6y + 3t^2$.
   Indication : On cherche une solution $y \in \mathbf{R}_2[t]$.

5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' - 4y' + 3y = 0$.
   (b) $y'' = 0$.
   (c) $y'' + 4y' + 4y = 0$.
   (d) $y'' = -y'$.

6. Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant les résultats de l'exercice précédent :
   (a) $y'' - 4y' + 3y = 1$.
   (b) $y'' = -1$
   (c) $y'' + 4y' + 4y - 2 = 0$.
   (d) $3 = y'' + y'$.

7. On considère $(E_x) : y'' - 2y' + y = x^2 + 1$.
   (a) Résoudre (E_0)
   (b) Trouver une solution de l'équation : $y'' - 2y' + y = x^2$ qui appartient à $\mathbf{R}_2[x]$.
   (c) Résoudre (E_x). Donner la solution y telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

8. On va étudier la célèbre équation logistique :
   $$y' = ay(m - y) \text{ où } (a, m) \in]0, +\infty[.$$
   (a) Trouver deux trajectoires d'équilibre.
   (b) Soit y une solution de (E) non constante. On admet que pour tout $t \in \mathbf{R}, y(t) \neq 0$. Montrer que $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de : $z' = cz + d$ où $(c, d) \in \mathbf{R}^2$ à déterminer.
   (c) En déduire la forme de y et donc résoudre (E).
   (d) Les solutions convergent-elles ? Si oui, vers quoi ?
   (e) Dans cette question $a = m = 1$.
   Tracer la trajectoire associée à la solution y de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$.

9. Résoudre en discutant suivant les valeurs de a, l'équation différentielle :
   $$(E) : ay'' - y' + (1 - a)y = 0$$

10. Soit : $(E) : y' + y = e^{-t} \ln t$
    (a) Résoudre l'équation homogène associée et déterminer la solution h vérifiant
    $$y(0) = 1$$
    (b) Justifier que pour toute fonction f dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, il existe une unique fonction g dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, telle que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(t) = g(t)h(t)$
    (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g' pour que f soit solution de (E)
    (d) En déduire les solutions de (E), sur $\mathbf{R}_+^*$.

11. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbf{R}$.
    (a) Soit a une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et $f : x \mapsto a(x)e^{-x}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si : $\forall x \in \mathbf{R}, a'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
    (b) En déduire une solution particulière de (E)
    (c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).