Corrigé du Test du Lundi 05/02

1 – $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_2 = 4C_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$

$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 2$ car C_1 et C_2 sont non colinéaires.

$\operatorname{rg} C = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 2L_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \underset{L_3 + 3L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 3$

$\operatorname{rg} D = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 2L_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 + \frac{1}{2}L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

$\operatorname{rg} E = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

2 – $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(x, y) \longmapsto (2x, 2x+y)$ $\quad$ $(a, b, c) \longmapsto (a, b, a)$ $\quad$ $(x_i)_{1 \le i \le n} \longmapsto (x_1)_{1 \le i \le n}$

- Pour la linéarité de f, g et h voir TD !
- Pour savoir s'ils sont bijectifs, comme ce sont des endomorphismes, il suffit d'étudier leur injectivité, càd leur noyau :
  - Soit $(x, y) \in \ker f \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $\ker f = \{0\}$:
    f est bijective.
  - Soit $(a, b, c) \in \ker g \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ donc $(a, b, c) = c(0, 0, 1)$
    Ainsi $\ker g = \operatorname{Vect}[(0, 0, 1)] \neq \{0\}$
    qui n'est pas injective donc pas bijective.

• Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \ker h \iff \begin{cases} x_1=0 \\ \vdots \\ x_1=0 \end{cases}$ donc $(x_1,\dots,x_n) = (0,x_2,\dots,x_n)$

Ainsi $\ker h = \mathrm{Vect}[(0,1,\dots,0);\dots;(0,\dots,1)] \neq \{0\}$: h n'est pas bijective.

③ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$

$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, x_1\right)$

• Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \ker f \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = -x_{n-1} - \dots - x_2 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Ainsi $(x_1,\dots,x_n) = (0, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_{n-1} - \dots - x_2)$

$= x_2(0,1,0,\dots,-1) + \dots + x_{n-1}(0,\dots,1,-1)$

Donc $\ker f = \mathrm{Vect}[(0,1,0,\dots,-1);\dots;(0,\dots,1,-1)]$

(qu'on peut écrire $\mathrm{Vect}((e_i - e_n)_{2\leq i\leq n-1})$)

Ainsi $\dim \ker f = n-2$ car $(e_i - e_n)_{2\leq i\leq n-1}$ est libre

et donc $\mathrm{rg} f = 2$ d'après le théorème du rang.

$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (on retrouve $\mathrm{rg}\,\mathrm{Mat}_B(f) = 2$)

④ Soit $F = \mathrm{Vect}[(1,1,-1)]$ et $G = \mathrm{Vect}[(1,1,-1);(-1,1,0)]$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on obtient $\ker A = F$ et $\mathrm{Im}\, A = G$

donc f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A convient.