TD : Séries

1. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme lorsqu'elles convergent.

   (a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

   (b) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

   (c) $\sum_{n\geqslant 1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

   (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n} - e^{-n-1}$

   (e) $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+3} - \sqrt{n+4}$

   (f) $\sum_{n\geqslant 2} \ln(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)})$

2. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

   (a) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$

   (b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{(n+1)!}$

   (c) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}$

   (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(n+1)!}$

   (e) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}$

   (f) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1+2^{n-1}+3^{n+1}}{n!}$

   (g) $\sum_{n\geqslant 3} \frac{n+(n-1)2^n+(n+1)4^{n-1}}{(n-2)!}$

3. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

   (a) $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   (b) $\sum_{n\geqslant 3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

   (c) $\sum_{n\geqslant 1} e^{-n}$

   (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^{n+1}} + 2^{-n}$

   (e) $\sum_{k\geqslant 1} e^{-k(x^2+1)}$ où $x \in \mathbf{R}$

   (f) $\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

   (g) $\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$

   (h) $\sum_{k\geqslant 2}(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$

   (i) $\sum_{k\geqslant 0}(k+3)e^{-k-2}$

   (j) $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)e^{-k+2}$

   (k) $\sum_{k\geqslant 2} e^{-k-1} + k\left(\frac{1}{2}\right)^k + k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$

4. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   (a) Montrer que, pou $k \geqslant 2$: $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$

   (b) Montrer que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

   (c) En déduire que $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

   (d) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

5. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$

   (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que : $\forall k \geq 3, u_k = \frac{a}{(k-3)!} + \frac{b}{(k-2)!} + \frac{c}{(k-1)!}$.

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et donner sa somme.

6. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et donner sa limite. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

   (d) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

   (e) Simplifier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$.

   (f) Donner la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2$.

7. On va étudier la nature de la série dite harmonique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

   (a) Expliciter la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et en déduire sa nature (on fera apparaître un télescopage).

   (b) Montrer que, pour tout $x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

8. Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} > 1$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, nu_n \geq u_1$.
   (c) Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

9. On considère : $\forall n \in \mathbf{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Calculer la limite de ces suites en s'intéressant à leurs sommes et leurs différences.

10. En utilisant un télescopage montrer que les séries $\sum \frac{2n-1}{2.4\ldots(2n)}$ et $\sum \frac{n}{1.3.5\ldots..(2n+1)}$ convergent et calculer leurs sommes.

11. Montrer que pour tout $a \in]1, +\infty[, \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-1}$. En déduire la nature et la somme de $\sum \frac{2^n}{q^{(2^n)}+1}$ avec $q > 1$

12. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.
    (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
    (b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
    (c) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Expliquer pourquoi $\frac{1}{nn!} < \varepsilon$ est une condition suffisante pour que u_n et v_n soient des approximations de e à ε près.
    (d) Écrire un programme Python qui donne des valeurs approchées de e à 10^{-3} près.
    (e) * On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$, tels que $e = \frac{p}{q}$. En utilisant que $u_q < e < v_q$, montrer que l'on aboutit à une contradiction. Qu'a-t-on démontré ?

13. Soit (u_n), une suite réelle qui converge vers 0. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = u_n + u_{n+1}$ sont de même nature. (On raisonnera par double implication).

14. Soit (u_n) une suite décroissante ayant pour limite 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
    (a) Prouver que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
    (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq0} (-1)^n u_n$
    (c) Justifier qua la série $\sum_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument (on pourra utiliser les résultats précédents ainsi qu'un exercice de la feuille).

15. Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum_{n\geq0} u_n$ converge. Prouver que $\sum_{n\geq0} u_n^2$ converge.