Corrigé Test 13 - 26/02

1 _ Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

ⓐ $\begin{cases} y' = 2y + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} y'' - 7y' + 12y = t + 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

2 _ Déterminer les solutions de :

ⓐ $y' + y = t^2$ ⓑ $\begin{cases} y' + y = t^2 + e^{-t} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Tracer la trajectoire dans la ⓑ. Est-elle convergente ?

3 _ ⓐ Soit (E) : $y^{(3)} - y' = 2$

Résoudre (E). On pourra poser $z = y'$

ⓑ* Proposer une solution de (F) : $\begin{cases} y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 2 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$

1 – (a) $S = \left\{ y : t \longmapsto \frac{5}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} \right\}$

(b) $S = \left\{ y : t \longmapsto \frac{368}{144} e^{3t} - \frac{243}{144} e^{4t} + \frac{1}{12} t + \frac{19}{144} \right\}$

2 – (a) $S = \left\{ y : t \longmapsto \lambda e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \;;\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

(b) Cherchons d'abord une solution pour $y' + y = e^{-t}$. On la cherche de la forme ate^{-t}, en injectant cela donne $ae^{-t} - ate^{-t} + ate^{-t} = e^{-t}$ donc $a = 1$ d'où te^{-t} est solution.

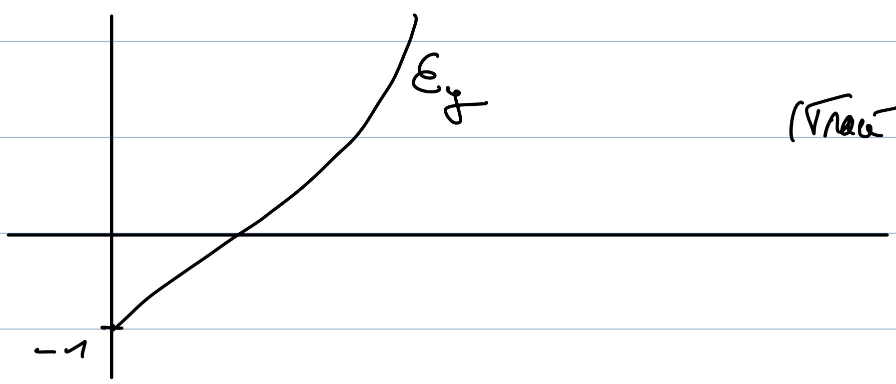
Par superposition en utilisant la (a) : $t^2 - 2t + 2 + te^{-t}$ est solution particulière.

D'où les solutions sont de la forme $y : t \longmapsto \lambda e^{-t} + t^2 - 2t + 2 + te^{-t}$.

Pour avoir $y(0) = 1$, on veut $\lambda + 2 = 1$ donc $\lambda = -1$.

Donc la solution cherchée est $y : t \longmapsto -e^{-t} + t^2 - 2t + 2 + te^{-t}$.

• La limite de y en $+\infty$ vaut $+\infty$ donc elle ne converge pas.



(Tracé approximatif)

3 – (a) En posant $z = y'$, l'équation se réécrit $z'' - z = 2$.

Cela est une E.D.L 2 donc $z(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{t}$ est solution de l'équation homogène. Comme $z(t) = -2$ est solution particulière alors z est de la forme : $t \longmapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{t} - 2$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ainsi comme $y' = z$, y est de la forme $\boxed{-\lambda e^{-t} + \mu e^{t} - 2t + \gamma}$

où $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$.

(b) On s'inspire de la méthode pour les EDL2 : posons l'équation caractéristique :

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

Cette équation a 3 solutions 1, 2 et -1.

Donc essayons une solution de la forme $y(t)=\lambda e^{t}+\mu e^{2t}+\gamma e^{-t}$ où $\lambda,\mu,\gamma\in\mathbb{R}$.

De plus $y(t)=1$ est solution particulière donc on va essayer :

$$y(t)=\lambda e^{t}+\mu e^{2t}+\gamma e^{-t}+1.$$

Cherchons alors λ,μ,γ tels que :

$$\begin{cases}\lambda+\mu+\gamma+1=1\\ \lambda+2\mu-\gamma=1\\ \lambda+4\mu+\gamma=1\end{cases}\underset{L_3-L_1}{\overset{L_2-L_1}{\iff}}\begin{cases}\lambda+\mu+\gamma=0\\ \mu-2\gamma=1\\ 3\mu=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ \gamma=-\frac{1}{2}\\ \mu=0\end{cases}$$

Ainsi essayons $\boxed{y(t)=\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}+1}$ comme solution.

On a : $y^{(3)}-2y''-y'+2y=\left(\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)-2\left(\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)+2\left(\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}+1\right)$

$$=2$$

donc on a bien une solution de (E).