

Séries

1 - Généralités

Définition: Etant donné une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, on définit une nouvelle suite :

$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$. On l'appelle la suite des sommes partielles associées à $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Cette suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ est aussi appelée série de terme général u_n . On la note $\sum u_n$ ou encore $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

exemple: Soit $u_n = n$, pour tout $n \geq 0$: $(u_n) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} : (S_n) = (0, 1, 3, 6, 10, \dots)$$

Définition: Lorsque $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite finie, on dit que la série de terme général u_n converge.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On appelle cette limite la somme de la série.

exemple: Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\text{Ainsi: } S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{par télescopage}$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

$$\text{On note alors: } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

On peut afficher S_{1000} en Python :

$$S = 0$$

$$u = 1/1 - 1/2 \quad \# \quad u_1$$

for k in range(2, 1001):

$$u = 1/k - 1/(k+1) \quad \# \quad u_k$$

$$S = S + u \quad \# \quad \text{calcul } S_k$$

print(S) $\#$ et s'affiche $S_{1000} \approx 1$.

Proposition: Si la suite $(u_n)_{n \geq m_0}$ est positive alors $(S_n)_{n \geq m_0}$ est croissante.

Preuve: Soit $n \geq m_0$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=m_0}^{n+1} u_k - \sum_{k=m_0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0$.

Remarque: Dans le cas où $u_n \geq 0$ ou bien $\sum u_n$ converge ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

Proposition: Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Preuve: Supposons que $\sum u_n$ converge. Cela signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$.

$$\text{On remarque que } S_n - S_{n-1} = \sum_{k=m_0}^n u_k - \sum_{k=m_0}^{n-1} u_k = u_n.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = l - l = 0.$$

Proposition: Etant donné deux suites $(u_n)_{n \geq m_0}$ et $(v_n)_{n \geq m_0}$ et des réels α et β .

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge alors $\sum \alpha u_n + \beta v_n$ converge,

$$\text{et on a } \sum_{n=m_0}^{+\infty} \alpha u_n + \beta v_n = \alpha \sum_{n=m_0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=m_0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque: On peut donc linéariser des séries à condition que les séries en présence convergent.

Définition: Soit $\sum_{n \geq m_0} u_n$ une série convergente. On appelle reste d'ordre m :

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k.$$

Naturellement, $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m = 0$ étant donné que $R_m = \sum_{k=m_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=m_0}^m u_k$.
et que $\sum_{k=m_0}^{+\infty} u_k = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m_0}^m u_k$ par définition de la somme d'une série convergente.

2. Séries de référence.

Proposition (série géométrique):

La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Dans ce cas, sa somme vaut : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Preuve: Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $N \geq 0$.

2 cas se présentent :

• si $|x| > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \neq 0$ donc $\sum_{n \geq 0} x^n$ diverge.

• si $|x| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$
 $x \neq 1$

par contre-exemple de la proposition: $\sum u_n < \infty \Rightarrow u_n \rightarrow 0$.

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{1}{1-x}$, d'où $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Remarque: Il est utile de connaître la formule plus générale, pour $|x| < 1$ et $m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=m_0}^{+\infty} x^n = x^{m_0} \frac{1}{1-x}.$$

exemple: Pour calculer la valeur d'une entreprise, une méthode utilisée s'appelle la méthode DCF (discounted cash-flows): elle consiste à calculer la somme des revenus (cash-flows) que va générer chaque année l'entreprise. Bien sûr, une somme d'argent dans le futur a moins de valeur qu'une somme aujourd'hui, on applique donc un taux chaque année à l'argent, disons 2%.

Disons qu'une entreprise va générer chaque année 100€. Sa valeur V vaut la somme

actualisée de ses cash-flows: $\frac{100}{1,02} + \frac{100}{1,02^2} + \frac{100}{1,02^3} + \dots$

Les 100€ de la 1^{ère} année Les 100€ de l'année 2 etc

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{100}{1,02^n} = 100 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1,02} \right)^n = 100 \times \frac{1}{1,02} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,02}} = \frac{100}{0,02} = 5000€.$$

$\left| \frac{1}{1,02} \right| < 1$

Ainsi une entreprise qui génère 100€ chaque année se valorise 5000€.

Proposition (séries géométriques dérivées):

Les séries $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2}$ convergent et ce seulement si $|x| < 1$.

Dans ce cas: $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Preuve: Si $|x| > 1$, $(n x^{n-1})_{n \geq 1}$ et $(n(n-1) x^{n-2})_{n \geq 2}$ ne tendent pas vers 0, donc les séries divergent.

Si: $|x| < 1$, on va calculer, la somme partielle $S_N = \sum_{n=1}^N n x^{n-1}$.

On sait que : $\forall x \in]-1, 1[$ $\sum_{m=0}^N x^m = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$
 en dérivant les deux membres : $\sum_{m=1}^N m x^{m-1} = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + 1-x^{N+1}}{(1-x)^2} (*)$
 Par raisonnements comparés lui $\lim_{N \rightarrow \infty} (N+1)x^N = 0$ car $|x| < 1$,
 donc $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc on a lieu $\sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
 La dernière série est la même en valeur : il suffit de dériver la relation (*) et
 de passer à la limite

Proposition: Pour tout réel x , $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ converge et $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$.

Remarque: On peut prouver ce résultat en utilisant des intégrales, nous tout de même que dans la littérature, on définit la fonction exponentielle par cette formule.

Cette formule permet d'avoir des valeurs approchées de e^x , pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{pour } x=1, e = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1^m}{m!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\text{remarque que } 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} \simeq 2,66 \text{ et } e \simeq 2,718$$

Proposition (lien suites / séries):

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On a l'équivalence suivante:

(u_n) converge si et seulement si la série $\sum_{m=0}^{\infty} u_{m+1} - u_m$ converge

Preuve (à connaître): Soit $N \geq 0$, $\sum_{m=0}^N u_{m+1} - u_m = u_{N+1} - u_0$ par télescopage.

Donc la convergence de la série $\sum u_{m+1} - u_m$ équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

3. Compléments

Définition: On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque: Cette notion n'a d'intérêt que pour les séries dont le signe n'est pas constant : on n'en rencontrera que très peu dans la pratique.

Proposition: Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge.

Remarque: La réciproque est, en général, fautive :

par exemple la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument, on le verra au chapitre.

Manipulations algébriques des séries :

Étant donnée une série $\sum u_n$ convergente, on peut :

- sortir des termes : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$
- utiliser la relation de Cauchy : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
- décaler l'indice : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}$ (noter que $+\infty + 1 = +\infty$).

⚠ À ne pas utiliser sur des séries divergentes. Voir :

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 1. \text{ Donc } 0 = 1 !$$

Il y a eu deux manipulations illégitimes dans le calcul ci-dessus :

- décaler des que les séries $\sum 1$ sont divergentes . changeant d'indice dans la série divergente

Proposition (Au programme de 2^{ème} année) :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, si :

pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Preuve: Posons, pour $N \geq 0$ $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

. $(S_N)_{N \geq 0}$ est croissante car $u_n \geq 0$

. $S_N = \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ car $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge et que $v_n \geq 0$.

donc $(S_N)_{N \geq 0}$ est croissante et majorée par $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ (ne dépend pas de N)

donc par le théorème de la limite monotone $(S_N)_{N \geq 0}$ converge, donc

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

exemple: Soit $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$.

On sait que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n=2}^N v_n = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{N}$ par télescopage.

d'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N v_n = 1$ donc $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ converge.

donc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après la proposition.

On ne connaît en revanche pas la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ avec cette méthode.

Proposition (Au programme de 2^{ème} année) :

Soit (u_n) une suite vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve: Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$:

$$|m^2 u_m| \leq 1, \text{ donc } |u_m| \leq \frac{1}{m^2}$$

ou $\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$ converge (exemple précédent)

donc $\sum_{n=N}^{+\infty} |u_m|$ converge (proposition précédente)

donc $\sum_{n=N}^{+\infty} u_m$ converge absolument donc converge.

exercice : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

$$\text{Posons, pour } N \geq 1, S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

$$\text{Montrons que } S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{2N - (N+1) + 1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Si, par l'absurde (S_N) converge, alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} - S_N = 0$, donc $0 \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi (S_N) diverge c'est-à-dire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

De plus $\frac{1}{n} \geq 0$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = +\infty$ (croissante et non majorée).

Cela signifie que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ devient aussi grand que l'on souhaite si on ajoute suffisamment de termes.

Alors que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ va se rapprocher d'une limite finie (car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge)

Cela s'explique en fait car $\frac{1}{n^2}$ tend plus vite vers 0 que $\frac{1}{n}$.

Proposition (Riemann, programme de 2^{ème} année):

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$