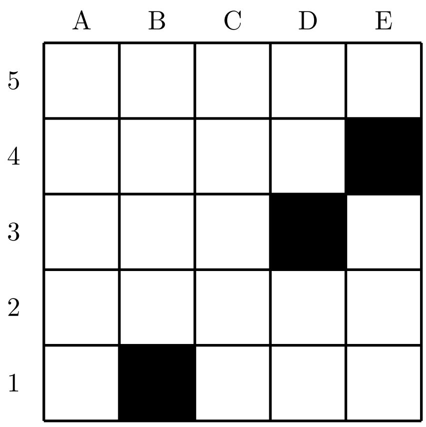
Cahier de vacances

Mode d'emploi : comment passer de bonnes vacances tout en gardant une agilité mathématique et en préparant la rentrée ? Voici un recueil d'exercices, jeux et autres énigmes. Certains sont très faciles, d'autres demandent plus de temps, voire une certaine dose de ténacité ! Attention, calculatrice interdite !
Nul besoin de s'acharner, il s'agit d'en faire un peu chaque jour... Et n'oubliez pas, **use it or lose it !**

$\boxed{1}$ • Déterminer deux nombres dont la somme vaut 45 et tels que le double de leur différence soit égal à 14.
• Déterminer une fraction d'entiers telle que si on ajoute 1 au numérateur elle devienne égale à $\frac{1}{4}$ tandis que si on ajoute 1 au dénominateur elle devienne égale à $\frac{1}{5}$.

$\boxed{2}$ Remplir la grille de nombres croisés ci-dessous sachant que tous les nombres y figurant sont des entiers naturels non nuls.



Horizontalement
1. Carré parfait.
   Le produit de ses chiffres est 392.
2. Permutation de 23444.
3. Multiple de 139.
   Reste de la division euclidienne de 2010 par 9.
4. Le nombre formé par ses deux premiers chiffres est le même que celui formé par ses deux derniers chiffres.
5. Carré parfait dont le produit des chiffres est 756.

Verticalement

A. La somme de ses chiffres est 35.

B. Entier divisible par 11.

C. Nombre palindrome.

D. Nombre premier.
   Cube parfait.

E. Entier naturel admettant un seul diviseur positif.
   Le produit de ses chiffres est 72 et seul son dernier chiffre est pair.

$\boxed{3}$ Les nombres $A = \dfrac{33215}{66317}$ et $B = \dfrac{104348}{208341}$ sont-ils égaux ?

$\boxed{4}$ Développer $(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)$.

$\boxed{5}$ Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{3}{(x-1)(6x-2)} = \dfrac{4}{1-2x}$ b) $\dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{3x-1}{x}$

$\boxed{6}$ Eva possède 1000€ sur son compte. Chaque mois, elle prélève 5% de la somme qu'il lui reste. Au bout de combien de mois lui restera t-il moins de 500€ sur son compte ?

$\boxed{7}$ a) Qui est le plus petit ? $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ ou $\sqrt{29}$?
b) Si $\dfrac{a}{b+c+d} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{4}{5}$, que vaut $\dfrac{a}{d}$?

$\boxed{8}$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2, et illustrer cette propriété par un dessin.

$\boxed{9}$ Résoudre les équations suivantes :

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ | b) $\sqrt{2}x^4 - 4x^2 = -2\sqrt{2}$

$\boxed{10}$ On considère un échiquier (8x8 cases) dont on enlève deux cases opposées (deux « coins »). Est-il possible de recouvrir la surface restante avec des dominos ? (un domino couvre deux cases adjacentes).

$\boxed{11}$ Trouver trois entiers a, b et c dont toutes les sommes deux à deux sont des carrés.

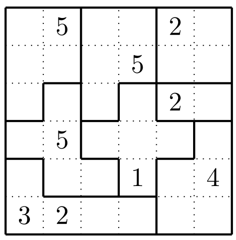
$\boxed{12}$ Montrer que : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1+3}{5+7} = \dfrac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots$.

$\boxed{13}$ Trouver l'intrus :

$\dfrac{1-\sqrt{2}}{-3+2\sqrt{2}}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{7+5\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$\boxed{14}$ **Suguru 1** jeu de logique : on remplit les cases vides en respectant les deux règles suivantes

- une zone de taille n doit contenir chacun des entiers de 1 à n ;
- dans la grille, deux entiers égaux ne doivent jamais se trouver sur des cases adjacentes (ni verticalement, ni horizontalement, ni en diagonale)



$\boxed{15}$ Résoudre les inéquations suivantes :

a) $4x^3 - x > 2x^2 + x$
b) $(x^3 - 9x)(x+1) > 0$
c) $\dfrac{5x-1}{2-3x} \geqslant 2$

$\boxed{16}$ Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs.

1. Montrer que si $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$, alors $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a+c}{b+d} \leqslant \dfrac{c}{d}$.
2. Qu'obtient-on si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$?

$\boxed{17}$ Un triangle rectangle a une hypoténuse de 13 et un périmètre de 30. Quelles sont les longueurs des deux autres côtés ?

$\boxed{18}$ Voici un extrait d'un ouvrage de Lewis Carrol. Un témoin a assisté à un cambriolage. Sa déposition est confuse, mais il en ressort quelques informations certaines. Chacune des assertions suivantes est vraie :

(1) Le cambrioleur est venu en voiture ou le témoin s'est trompé.

(2) Si le cambrioleur a un complice, alors il est venu en voiture.

(3) Le cambrioleur n'avait ni complice et ni clé ou le cambrioleur avait un complice et avait la clé.

(4) Le cambrioleur avait la clé.

Que peut-on en conclure ? Si on remplace la dernière par « le cambrioleur n'avait pas la clé », que peut-on conclure ?

$\boxed{19}$ On considère un nombre x tel que $x + \dfrac{1}{x} = 1$.

Sans calculer la valeur de x, déterminer celle de $x^7 + \dfrac{1}{x^7}$.

$\boxed{20}$ Peut-on tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

$\boxed{21}$ On vend successivement $\frac{1}{3}$, puis $\frac{2}{9}$ puis $\frac{1}{5}$ de la contenance en litre d'une barrique de vin. Le reste est vendu 1,5€ le litre ; le prix de vente de ce reste est 66€. Quelle est la contenance de la barrique ?

$\boxed{22}$ a) Écrire $A = \dfrac{\sqrt{e^{5x+3}}}{e^{3x} \times e^{-3x+1}}$ sous la forme $A = e^y$ avec $y \in \mathbb{R}$.

b) Écrire $B = \ln\left(\dfrac{e^2 \times 24}{e^3} \times e^2\right)$ sous la forme

$B = m + n\ln 2 + p\ln 3$ avec $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

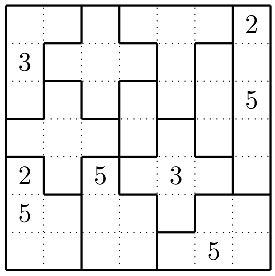
$\boxed{23}$ En 1654, deux joueurs, Jacques et Gottfried, effectuent une partie de dés en trois manches gagnantes (c'est-à-dire que le premier qui a gagné trois manches a gagné la partie). La partie doit s'interrompre alors que Jacques mène deux manches à une. Chaque joueur a misé 12 pistoles : comment doit-on redistribuer les mises pour être équitable ? Même question si Jacques mène deux manches à zéro.

$\boxed{24}$ Soient x et y deux réels strictement positifs. On définit a et b par : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ et $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

1. Donner une expression simple de $a + b$.
2. Exprimer x et y à l'aide de a et b.

$\boxed{25}$ Quatre cartes sont posées sur la table : sur chaque carte est inscrit d'un côté un chiffre, de l'autre une lettre. On peut voir sur les quatre cartes respectivement :
A, 1, Z, 2.
Anatole affirme que si le chiffre 1 est écrit d'un côté d'une carte, alors sur l'autre côté se trouve la lettre A.
Quelles cartes est-il nécessaire de retourner pour vérifier l'affirmation d'Anatole ?

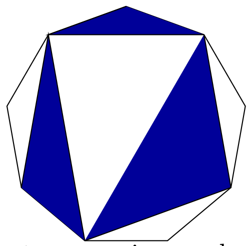
$\boxed{26}$ **Suguru 2**



$\boxed{27}$ Classer les entiers suivants : $2^{2^{2^3}}$ $2^{2^{3^2}}$ $2^{3^{2^2}}$ $3^{2^{2^2}}$

$\boxed{28}$ Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} \leqslant -2$

$\boxed{29}$



La figure ci-contre représente un polygone à 9 côtés qu'on a découpé en triangles : on a colorié ces triangles de sorte que deux triangles voisins ne soient jamais de la même couleur.

Démontrer que si on se donne un polygone à n côtés et qu'on le découpe en triangles, on peut toujours s'arranger pour les colorier ainsi.

$\boxed{30}$ On appelle $n^{\text{ième}}$ *nombre triangulaire* et on note t_n le nombre $t_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
Est-il vrai que la somme des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est un nombre triangulaire ?

$\boxed{31}$ Voici un extrait du **livre qui rend fou** du logicien Raymond Smullyan.
En transylvanie, il y a des vampires et des humains. Dans cet étrange pays, les vampires mentent toujours et les humains disent toujours la vérité. Pour compliquer les choses, vampires comme humains peuvent être fous, auquel cas ils se trompent systématiquement. Un humain fou dit donc toujours des choses fausses tandis qu'un vampire fou dit toujours la vérité.
L'inspecteur Craig, éminent logicien, est envoyé pour démasquer les vampires. La police locale a arrêté à plusieurs reprises deux personnes, et sont persuadés qu'à chaque fois il y a un vampire et un être humain, mais n'ont pas réussi à trouver lequel était le vampire. On ne sait pas si parmi les deux personnes il y a des fous.

1. **Lucie et Minna**
   Pour sa première enquête, Craig devait reconnaître qui était le vampire parmi deux sœurs. Voici leur interrogatoire :
   - Craig à Lucie : *Qu'avez-vous à dire ?*
   - Lucie : *Nous sommes folles*
   - Craig à Minna : *Est-ce vrai ?*
   - Minna : *Bien sûr que non !*

   Laquelle est un vampire ?
2. **Les frères Lugosi**
   - L'aîné : *Je suis un être humain*
   - Le cadet : *Moi aussi*
   - L'aîné : *Mon frère est sain d'esprit*

   Qui est le vampire ?

3 . **Michael et Peter Karloff**
- Michael : *Je suis un vampire*
- Peter : *Je suis un être humain*
- Michael : *Concernant l'aliénation mentale, mon frère et moi en sommes au même point.*

Lequel est le vampire ?

$\boxed{32}$ Dans un univers probabilisé (Ω, P) on considère deux événements A et B tels que $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$ et $P(A) = \dfrac{1}{5}$.
Calculer $P(B)$ lorsque :
- A et B sont incompatibles,
- A et B sont indépendants,
- $A \subset B$.

$\boxed{33}$ Extract form *My best mathematical and logic puzzles*, by Martin Gardner.
Two Ferryboats start at the same instant from opposites sides of a river, traveling across the water on routes at right angles to the shores. Each travels at a constant speed, but one is faster than the other. They pass at a point 720 yards from the nearest shore. Both boats remain in their slips for 10 minutes before starting back. On the return trips they meet 400 yards from the other shore. How wide is the river ?

$\boxed{34}$ Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots+n}$.

$\boxed{35}$ Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

a) $(3x+1)\mathrm{e}^x = 0$;

b) $-\mathrm{e}^{x^2+3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+3}}$;

c) $\mathrm{e}^{6x} - 4\mathrm{e}^{3x} + 4 = 0$;

d) $\mathrm{e}^x - 3 + 2\mathrm{e}^{-x} = 0$.

$\boxed{36}$ Un sac contient une boule qui est soit noire soit blanche, avec équiprobabilité.
On ajoute une boule blanche dans le sac puis on tire au hasard : on obtient une boule blanche.
On la remet dans le sac et on procède à un nouveau tirage : quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

$\boxed{37}$ On a écrit les nombres impairs comme suit :

Calculer la somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne.

1			
3	5		
7	9	11	
13	15	17	19

$\boxed{38}$ Déterminer le domaine de définition des équations suivantes, puis les résoudre.

a) $\ln(x) + \ln(x-1) = 0$;

b) $\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$;

c) $2\ln(x)^2 + 3\ln(x) - 2 = 0$.

$\boxed{39}$ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier multiple de 2^n qui ne s'écrit qu'avec des "1" et des "2".
(indication : on pourra construire une suite de tels multiples à n chiffres).
Montrer que le résultat est encore valable si on utilise un chiffre pair et un chiffre impair.

$\boxed{40}$ On appelle $n^{\text{ième}}$ *nombre triangulaire* et on note t_n le nombre $t_n = 1 + 2 + \ldots + n$.
Pour n entier naturel, on pose $S_n = 1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^n$.
S_n est-il toujours un nombre triangulaire ?

$\boxed{41}$ La mère Michelle adore les chats, mais elle en a moins que sa voisine qui en a vingt ! Si on prend au hasard deux des chats de la mère Michelle, il y a une chance sur deux pour qu'ils aient tous les deux la queue blanche. Combien a-t-elle de chats ?

$\boxed{42}$ Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

a) $\mathrm{e}^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}$; b) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 6 > 0$.

$\boxed{43}$ Le maire dit à son adjoint : « Tu vois ces trois personnes qui courent là-bas. Le produit de leurs âges est 2450. La somme de leurs âges est le double du tien.
- Je ne peux pas déterminer leurs âges, répond l'adjoint.
- C'est vrai, avoue le maire, mais je dois te dire qu'elles sont toutes plus jeunes que moi.
- Dans ce cas, je connais leurs âges.»

Quels sont les âges du maire et de l'adjoint ?

$\boxed{44}$ Une calculatrice est dotée des touches :
$\boxed{4}$ $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{)}$ $\boxed{(}$ et $\boxed{=}$
Pour afficher le résultat d'un calcul, il faut que la frappe de celui-ci comporte exactement quatre fois le chiffre 4. Par exemple : $(4 \times 4) - (4 : 4)$ permet d'afficher 15.
Est-il possible d'afficher tous les nombres entiers de 0 à 10 ?

$\boxed{45}$ Déterminer le domaine de définition des inéquations suivantes, puis les résoudre.

a) $\ln(2x-1) > -1$;

b) $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) \geqslant \ln 3$;

c) $\ln(x)(2 - \ln(x)) \geqslant 0$;

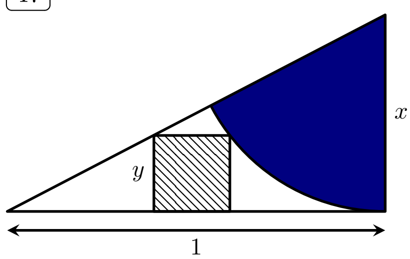
d) $\ln(x)^2 + 4\ln(x) + 4 \geqslant 0$.

$\boxed{46}$ D'après un problème du journal **le monde** :
Pour paver le fond de la piscine carrée qu'elle a fait construire (sur son terrain dont aucune dimension n'exède 25 mètres), une actrice holywoodienne se fait livrer des dalles bleues d'un mètre sur un mètre qui doivent constituer le carré central, et des dalles jaunes de même dimension destinées à entourer le carré central d'une ceinture d'un mètre de large.
Seulement voilà les stars sont capricieuses. Alors que les dalles sont déjà livrées, elle décide que c'est l'intérieur qui sera jaune et le contour bleu. D'abord catastrophé, l'architecte conçoit un nouveau projet de piscine carrée dont il est possible de paver le fond en respectant les voeux de la star et en utilisant toutes les dalles (sans les casser). Seule condition : la bordure bleu aura plus d'un mètre de large.

1 . Quelles sont les dimensions de la piscine ?

2 . Même question en supposant que l'actrice exige que le contour demeure large d'un mètre, et où l'architecte s'en sort en transformant son projet en piscine rectangulaire.

$\boxed{47}$



Pour quelle valeur de x le côté y du carré est-il maximal ?

48 Une calculatrice ne possède que trois opérations : addition, soustraction et inverse.
Peut-on néanmoins calculer le produit de deux nombres avec cette calculatrice ?

49 On appellera anagramme d'un nombre tout nombre obtenu en changeant l'ordre de ses chiffres. Par exemple 252 est un anagramme de 225. Comme 225 est le carré de 15, on dira que 252 est l'anagramme d'un carré.
Parmi les nombres suivants, un seul est l'anagramme d'un carré. Trouvez-le, sans calculatrice bien sûr !
703 , 322, 337, 481, 952.

50 On définit la fonction "logarithme étoilé" sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$$\ln^\star(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 + \ln^\star(\ln(x)) & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Calculer $\ln^\star(2)$.
2. Déterminer les antécédents de 1 par $\ln^\star$.
3. Quel est le plus petit réel α tel que $\ln^\star(\alpha) = 3$?

51 Mike sat down and started shuffling the cards. "What stakes ?" he asked. "Let's make it a gamble," Steve replied, putting a few bills ans some coins on the table. "The first game, the loser pays 1 cent, the second, 2 cents, and so on. Double up each time". "Okay", laughed Mike, checking his cash. "I've got only \$6.01 and I'm not playing more than 10 games anyway."
So they played, and game followed game until at last Mike stood up. "That's my last cents I've just paid you," he declared, "but I'll have my revenge next week."
How many games had they played, and which did Mike win ?

52 1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^{2025} - x^{2024} = 1$ dans $\mathbb{R}$.
2. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^{n+1} - x^n - 1 = 0$.

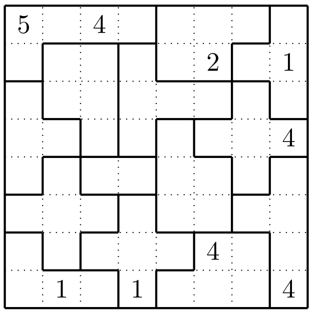
53 On considère un réel $a > 0$ et M le point d'abscisse a de l'hyperbole représentant la fonction inverse. On note A et B sont les points d'intersection avec les axes du repère de la tangente à l'hyperbole en M.
Montrer que M est le milieu de $[AB]$.

54 On note a, b et c trois nombres réels et on pose : $x = 3a + 2b + 2c$, $y = 2a + b + 2c$ et $z = 2a + 2b + c$.
Montrer que si $a^2 = b^2 + c^2$, alors $x^2 = y^2 + z^2$.

55 On dispose d'un dé à six faces truqué : chaque face à la même probabilité d'être obtenue, à l'exception du 6, qui a deux fois plus de chance que les autres : quelle est la probabilité de faire 3 ?

56 Montrer que, pour tout $x \geqslant -3$, $(1 + x)^3 \geq 1 + 3x$.

57 **Suguru 3**



58 On considère la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. Montrer h est impaire et vérifie $h' = 1 - h^2$.

59 La légende attribue ce problème au grand mathématicien Léhonard Euler :
Un groupe d'hommes et de femmes passent la nuit dans une auberge. Les routes étant dangereuses, les femmes sont moins nombreuses. Pour le repas et la nuit, les hommes payent 19 sous, et les femmes 13. L'aubergiste gagne 1000 sous avec ce groupe. Combien sont-ils ?

60 Soit $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Faire l'étude de la fonction f.
2. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f(a) = 0$. Déterminer a.
3. Montrer que le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est $\sqrt{5}$.

Extrait de Calvin et Hobbes de Bill Watterson :