PROGRAMME DE KHÔLLES ECG-1 : SEMAINES 19 ET 20

Les démonstrations des énoncés encadrés sont exigibles

ÉQUIVALENCE ET NÉGLIGEABILITÉ DE SUITES

$u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

* **Définition** : On dit que u est **négligeable devant** v lorsqu'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
  À partir d'un certain rang, $u_n=\varepsilon_n v_n$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$.
  On note $u=o(v)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
* **Caractérisation pratique de la négligeabilité** : Si, à partir d'un certain rang, $v_n\neq 0$. Alors :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$$
* **Transitivité** : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
* **Somme** : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ **alors** $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ au_n+bv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$
* **Multiplication par une constante** : Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$: $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$
* **Produit** : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v'_n)$ **alors** $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_nv'_n)$
* **Puissance** : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$ **alors** $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ (u_n)^k \underset{n\to+\infty}{=} o(\ (u'_n)^k\ )$.
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$ avec u_n et $u'_n>0$ àpcr, **alors** $\forall\alpha>0,\ (u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o((u'_n)^\alpha)$
* **Comparaison des suites usuelles de même type** : Soient a et b deux réels.
  Si $a<b$ **alors** $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^b\right)$
  Si $a<b$ **alors** $(\ln n)^a \underset{n\to+\infty}{=} o\left((\ln(n))^b\right)$
  Si $0<a<b$ **alors** $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(b^n\right)$
* **Comparaison de croissances de suites divergeant vers l'infini**
  Si a et b sont deux réels **positifs non nuls** **alors** $(\ln(n))^a \underset{n\to+\infty}{=} o(n^b)$
  Si a et q sont deux réels tels que $a>0$ et $q>1$ **alors** $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$
  Si q est un réel tels que $q>1$ **alors** $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
* **Comparaison de croissances de suites de limite nulle** :
  Si $0<q<1$ **alors** $\dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$
  Si $0<q<1$ et $b>0$ **alors** $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$
  Si a et b sont deux réels **positifs non nuls** **alors** $\dfrac{1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^b}\right)$
* **Définition** : On dit que u est **équivalente** à v, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, lorsqu'il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang, $u_n=v_n\lambda_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=1$
* **Caractérisation pratique de l'équivalence** si àpcr, $v_n\neq 0$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$
* **Transitivité** : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$
* **Symétrie** : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
* **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
* **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
* **Équivalence et négligeabilité** :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n-v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n+v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$
* **Équivalence et limites** : Soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$.
* **Équivalence et signe** : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les suites u et v sont de même signe à.p.c.r.
* Si $a_p\neq 0$, alors : $a_0+a_1n+\ldots+a_pn^p \underset{n\to+\infty}{\sim} a_pn^p$
* **Équivalents usuels** : Soit u une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ Alors :
  * $e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
  * $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad 1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$
  * $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ (1+u_n)^\alpha-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ en particulier, $\sqrt{1+u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$
* **Opérations sur les équivalents**
  Produit : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, **alors** $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_nv'_n$
  Quotient : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, avec $v_n, v'_n\neq 0$ apcr, **alors** $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u'_n}{v'_n}$
  Puissance :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ **alors** pour tout $k\in\mathbb{N}^*,\ (u_n)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^k$
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec $u_n, v_n>0$ apcr, **alors** pour tout $\alpha\in\mathbb{R},\ (u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$
  Valeur absolue : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ **alors** $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$

ÉQUIVALENCE ET NÉGLIGEABILITÉ DE FONCTIONS

* **Définitions et caractérisations pratiques** : fonctions équivalentes, fonctions négligeables.
* **Propriétés élémentaires** : transitivité, symétrie, équivalents et petits o
* Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x)-g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \iff f(x)-g(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x))$$

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \iff f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

* **Équivalence et limite** **Équivalence et signe**
* **Équivalent d'un polynôme au voisinage de $\pm\infty$ et de 0**
* **Les théorèmes de croissances comparées**
* **Équivalents usuels en** 0 : $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$; $\forall \alpha\in\mathbb{R},\ (1+x)^\alpha-1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$; $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$
* **Équivalent usuel en** 1 : $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$
* **Opérations sur les équivalents et les «petits o»**
* **«Changement de variable» dans un équivalent** : Soit u une fonction définie au voisinage de a telle que $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de b telles que $f(y) \underset{y\to b}{\sim} g(y)$ alors $f(u(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(u(x))$.

SÉRIES

* **Définitions** : série de terme général u_n, suite des sommes partielles, nature d'une série. Dans le cas où la série est convergente : somme de la série.
* **Proposition** : Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite. Alors :

  La suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge $\iff$ la série $\sum(u_{k+1}-u_k)$ converge.

* **Condition nécessaire pour la convergence d'une série** : **Si** la série $\sum u_k$ converge, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$
* Somme de deux séries
* Les séries $\sum q^k$, $\sum kq^{k-1}$ et $\sum k(k-1)q^{k-2}$ convergent **ssi** $q\in]-1,1[$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \boxed{\text{série géométrique}}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \boxed{\text{série géométrique dérivée d'ordre 1}}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \quad \text{série géométrique dérivée d'ordre 2}$$

* **Séries de Riemann** : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série $\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha>1$
* **Théorème (admis)** : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^k}{k!}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$
* Définition de l'absolue convergence
* **Théorème (admis)** : **Si** une série est absolument convergente, **alors** elle est convergente.
* Nature d'une série à termes positifs
* Critère de comparaison des séries à termes positifs
* Critère de négligeabilité des séries à termes positifs
* Critère d'équivalence des séries à termes positifs