III. Fonctions usuelles

1 Généralités sur les fonctions

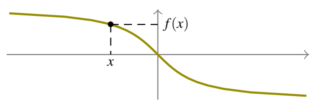
1.1 Vocabulaire de base

Définition 1.1 Le *domaine de définition* d'une fonction f, souvent noté $\mathscr{D}_f$, est l'ensemble des réels x tels que l'on puisse définir le nombre $f(x)$. On dit alors que f est définie sur $\mathscr{D}_f$, et on note

$$f : \begin{array}{rcl} D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Si $y = f(x)$ avec $x \in \mathscr{D}_f$, on dit que

- y est l'*image* de x par f,
- x est un *antécédent* de y.



Étant donnée une fonction f, on commencera toujours par préciser son ensemble de définition si celui-ci n'est pas donné.

Ne pas confondre f et $f(x)$: f est une fonction alors que $f(x)$ est un nombre réel. Ainsi, écrire 'la fonction $f(x)$...'' n'a pas de sens car $f(x)$ n'est pas une fonction, c'est l'image de x par la fonction f, et donc est un nombre réel. On écrira plutôt "la fonction f..." ou la fonction "$f : x \mapsto f(x)$...". Par exemple, on écrit "la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est paire" et non pas "la fonction $x^2 + 1$ est paire".

Les trois fonctions "à problème" à connaître sont les suivantes :

- la fonction *inverse* $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$,
- la fonction *racine carrée* $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$,
- la fonction *logarithme népérien* $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pourra donc utiliser la proposition suivante pour déterminer des ensembles de définition.

Proposition 1.2 Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $\mathscr{D}$. Soit $x \in \mathscr{D}$.

- $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe $\Leftrightarrow$ $g(x) \neq 0$,
- $\sqrt{f(x)}$ existe $\Leftrightarrow$ $f(x) \geqslant 0$,
- $\ln(f(x))$ existe $\Leftrightarrow$ $f(x) > 0$.

? Comment déterminer l'*ensemble de définition* $\mathscr{D}_f$ d'une fonction f ?

- L'ensemble de définition est parfois donné dans l'énoncé. Dans ce cas, il s'agit de vérifier que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ (même si ce n'est pas spécifiquement demandé par l'énoncé).
- Si l'ensemble de définition de f n'est pas donné, il s'agit de trouver l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. Cela amène généralement à résoudre une ou plusieurs (in)équations selon les contraintes données en Proposition 1.2.

Exemple 1.3 Déterminons l'ensemble de définition de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \sqrt{6-3x}.$$

Notons $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad 6-3x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 2.$$

Donc, l'ensemble de définition est donné par $]-\infty, 2]$.

Exemple 1.4

Fonction	Contrainte	$\mathscr{D}_f$
$x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4}$	$x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$	$\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$
$x \mapsto \sqrt{x-3}$	$x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$	$[3,+\infty[$
$x \mapsto \ln(2-x)$	$2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$	$]-\infty, 2[$
$x \mapsto \sqrt{x^2+3x+2}$	$x^2+3x+2 > 0 \Leftrightarrow x \notin]-2,-1[$	$]-\infty,-2] \cup [-1,\infty[$
$x \mapsto \ln(x^2-6x+9)$	$x^2-6x+9 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$	$\mathbb{R}\backslash\{3\}$

1.2 Opérations sur les fonctions

Proposition 1.5 Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathscr{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nom	Notation	Définition
Somme de f et g	$f+g$	Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Produit de f et g	$f \cdot g$ ou fg	Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$
Produit de f et λ	λf	Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Quotient de f et g*	$\frac{f}{g}$	Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

*Le quotient de f et g est bien défini que si g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$.

Proposition 1.6 — Composition de fonctions. Soient f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et g une fonction définie sur $\mathscr{D}_g$. On suppose que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(x) \in \mathscr{D}_g$.

Alors, la *composée* $g \circ f$ (se lit "g rond f") est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f$, donnée par

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathscr{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

? Les hypothèses de la Proposition précédente sont naturelles : si on veut que l'objet $g(f(x))$ ait un sens, il faut que

- x soit dans $\mathscr{D}_f$, pour pouvoir écrire $f(x)$,
- puis que $f(x)$ soit dans $\mathscr{D}_g$, pour pouvoir écrire $g(f(x))$.

! Avec les notations de la Proposition précédente, $g \circ f$ est bien définie mais ce n'est pas forcément le cas de $f \circ g$. La fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathscr{D}_g$ seulement si pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, on a $g(x) \in \mathscr{D}_f$.

Exemple 1.7 Soient f et g les fonctions données par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Tout d'abord la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
Déterminons maintenant les expressions de $f \circ g$ et $g \circ f$ quand ces fonctions existent.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1.$$

! Lorsque les deux fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, les deux composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$, mais en général, elles ne sont pas égales : $f \circ g \neq g \circ f$.

Par exemple, considérons les fonctions f et g définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 + 1,$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

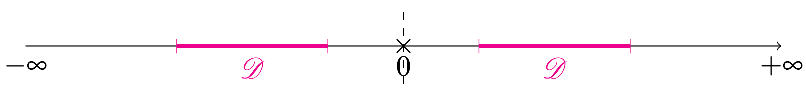
Donc $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales car $(g \circ f)(1) = 2$ tandis que $(f \circ g)(1) = 4$.

2 Propriétés des fonctions

2.1 Parité

Définition 2.1 Une partie de $\mathbb{R}$ est dite *symétrique par rapport à zéro* lorsque

$$\text{pour tout } x \in \mathscr{D}, \qquad -x \in \mathscr{D}.$$

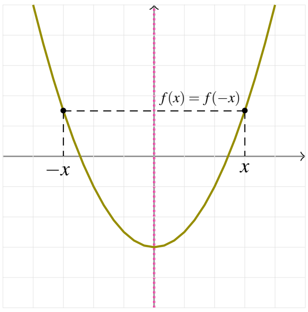


Exemple 2.2

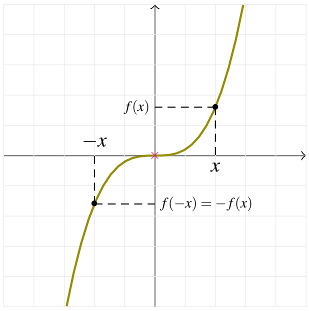
Ensemble	$\mathbb{R}^*$	$]-1,1]$	$]-5,5[$	$[-4,-2]\cup[2,4]$	$]-\infty,-4]\cup[4,9]$
Sym. % à 0	Oui	Non	Oui	Oui	Non

Définition 2.3 Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. <u>On suppose que</u> $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro. On dit que :

- f est *paire* <u>si</u> pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$,
- f est *impaire* <u>si</u> pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.



Représentation d'une fonction *paire* (ici $x \mapsto x^2$) : la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Représentation d'une fonction *impaire* (ici $x \mapsto x^3$) : la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

? Comment étudier la *parité* (à adapter pour l'imparité) d'une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$?

- Si $\mathscr{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0, alors f n'est pas paire.
- Si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0, alors
  - pour prouver que f est *paire*, on montre que <u>pour tout</u> $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$,
  - pour prouver que f n'est *pas paire*, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire on trouve <u>un</u> réel x pour lequel $f(-x) \neq f(x)$.

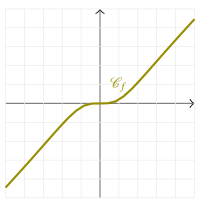
On peut aussi tracer au brouillon la courbe représentative de la fonction pour conjecturer la parité de la fonction.

Exercice 2.4 Étudions la parité de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^5}{x^4+3x^2+1} \end{array}$$

- *La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ ne s'annule jamais.*
- Son ensemble de définition, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^5}{(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{-x^5}{x^4 + 3x^2 + 1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$



Donc la fonction f est impaire.

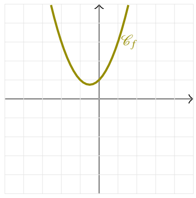
Exercice 2.5 Étudions la parité de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x + 1 \end{array}$$

- *La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
- Son ensemble de définition, donné par $\mathbb{R}$, est bien symétrique par rapport à 0.

- Au brouillon : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - x + 1 \\ &= x^2 - x + 1 \\ &= \dots \end{aligned}$$



On n'arrive pas à conclure le calcul, on conjecture alors que la fonction n'est ni paire ni impaire.

- On a $f(2) = 7$ et $f(-2) = 3$. Comme $f(2) \neq f(-2)$, la fonction n'est pas paire. Et comme $f(2) \neq -f(-2)$, la fonction n'est pas impaire non plus.

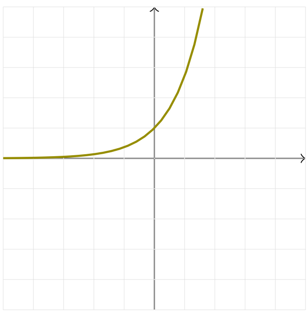
Donc la fonction f n'est ni paire ni impaire.

2.2 Monotonie

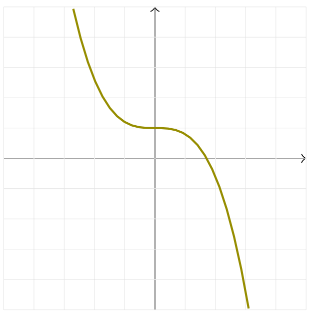
Définition 2.6 Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et I un intervalle de $\mathscr{D}_f$. On dit que f est

Vocabulaire	Définition
croissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
strictement croissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
décroissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$
strictement décroissante sur I si	pour tout $(x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

On dit que f est (strictement) *monotone* sur I si elle est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.



Représentation d'une fonction *croissante*, ici $x \mapsto \exp(x)$.



Représentation d'une fonction *décroissante*, ici $x \mapsto -\frac{2}{10}x^3 + 1$.

? Comment étudier la croissance (à adapter pour la décroissance) d'une fonction f sur un intervalle I ?

- Pour montrer que f est croissante, on commence par écrire : "Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$." Puis...
  - Première méthode : on montre que $f(x) - f(y) \leqslant 0$.
  - Deuxième méthode : on part de l'inégalité $x \leqslant y$ et en procédant par opérations élémentaires, on obtient, petit à petit, l'inégalité $f(x) \leqslant f(y)$.
- Pour montrer que f n'est pas croissante, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire deux réels x et y tels que $x \leqslant y$ mais $f(x) > f(y)$.

! On n'étudie pas forcément la monotonie d'une fonction sur tout son ensemble de définition.

Par exemple, la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$

- est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ car si $0 < x < y$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$,
- est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ car si $x < y < 0$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$,
- mais elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$.

Exemple 2.7 Étudions la monotonie de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

<u>Soit</u> $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$.

- Si $x \leqslant y \leqslant 0$ alors $x^2 \geqslant y^2$. Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant y$ alors $x^2 \leqslant y^2$. Donc la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Attention, la fonction n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (on a $-3 \leqslant 2$ et $(-3)^2 > 2^2$) et elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ (on a $-1 \leqslant 2$ et $(-1)^2 < 2^2$).

Proposition 2.8 — Opérations sur les fonctions monotones. Soient f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I.

- Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $f+g$ est croissante (resp. décroissante).
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  - Si $a > 0$ alors f et af ont le même sens de variation.
  - Si $a < 0$ alors f et af ont des sens de variation contraires.
- On suppose que $f \circ g$ est bien définie sur I.
  - Si f et g ont la même monotonie alors $f \circ g$ est croissante.
  - Si f et g ont des monotonies opposées alors $f \circ g$ est décroissante.

Démonstration. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I. Montrons que $f+g$ est une fonction croissante. <u>Soit</u> $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$. Comme f et g sont croissantes, on a

$$f(x) \leqslant f(y) \qquad \text{et} \qquad g(x) \leqslant g(y).$$

En sommant les deux inégalités, on obtient

$$f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y),$$

c'est-à-dire

$$(f+g)(x) \leqslant (f+g)(y).$$

Donc la fonction $f+g$ est croissante sur I. ∎

Exemple 2.9 Étudions la monotonie de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x \end{array}$$

Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc, en tant que somme, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.10 Étudions la monotonie de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{x^2} \end{array}$$

Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

- Les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. Donc, en tant que composition, la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$. Donc, en tant que composition, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

! On utilisera la monotonie pour justifier des transformations d'*inégalités*. Par exemple,

« Si $x \leqslant 12$ alors $e^x \leqslant e^{12}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. »

2.3 Majorants, minorants, extrema

Définition 2.11 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$.

- On dit que f est *minorée* sur $\mathscr{D}$ lorsque :

$$\underline{\text{il existe}} \text{ un réel } m \text{ tel que } \underline{\text{pour tout}}\ x \in \mathscr{D}, \quad f(x) \geqslant m.$$

  On dit alors que m est un minorant de f et que f est minorée par m.
- On dit que f est *majorée* sur $\mathscr{D}$ lorsque :

$$\underline{\text{il existe}} \text{ un réel } M \text{ tel que } \underline{\text{pour tout}}\ x \in \mathscr{D}, \quad f(x) \leqslant M.$$

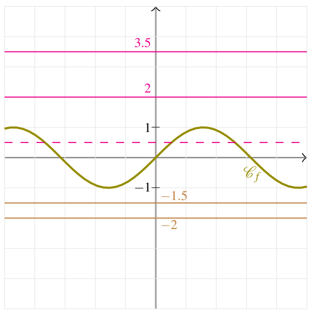
  On dit alors que M est un majorant de f et que f est majorée par M.
- On dit que f est *bornée* sur $\mathscr{D}$ lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire que

$$\underline{\text{il existe}} \text{ deux réels } m, M \text{ tels que } \underline{\text{pour tout}}\ x \in \mathscr{D}, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

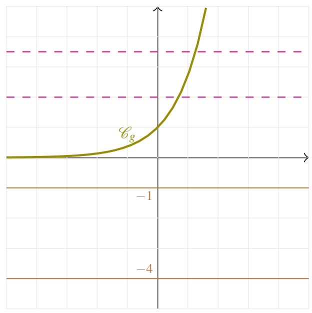
! Une fonction peut ne pas admettre de majorant (ou de minorant). Par contre, si elle en admet un, alors elle en admet une infinité (si elle est majorée par 2, elle l'est aussi par 2.1, 3, 12,...). C'est pour cela que l'on parle d'<u>un</u> majorant/minorant.

? On peut voir graphiquement les majorants et minorants d'une fonction :

- m est un minorant de f si la courbe représentative de f est au-dessus de la droite $y = m$.
- M est un majorant de f si la courbe représentative de f est au-dessous de la droite $y = M$.



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.
Majorants de f : 2, 3, 3.5,....
$\frac{1}{2}$ n'est pas un majorant
Minorants de f : -1.5, -2, -10,....
La fonction f est bornée



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x)$.
La fonction g n'a pas de majorants
Minorants de g : -1, -2,....
La fonction g n'est pas bornée

Définition 2.12 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$.

- On dit que m est <u>le</u> *minimum* de f sur $\mathscr{D}$ lorsque :

$$\text{pour tout } x \in \mathscr{D},\ f(x) \geqslant m \quad \text{et} \quad \text{il existe } x_0 \in \mathscr{D} \text{ tel que } m = f(x_0)$$

  On dit alors que le minimum m de f est atteint en x_0.
- On dit que M est <u>le</u> *maximum* de f sur $\mathscr{D}$ lorsque :

$$\text{pour tout } x \in \mathscr{D},\ f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad \text{il existe } x_0 \in \mathscr{D} \text{ tel que } M = f(x_0)$$

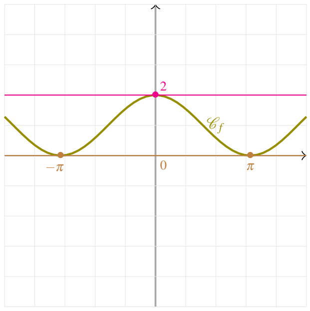
  On dit alors que le maximum M de f est atteint en x_0.
- On dit que f admet un *extremum* lorsqu'elle admet soit un minimum, soit un maximum.

? Un minimum (resp. un maximum) est donc un minorant (resp. majorant) atteint par la fonction. On précisera toujours en quelle(s) valeur(s) le minimum (resp. maximum) est atteint.

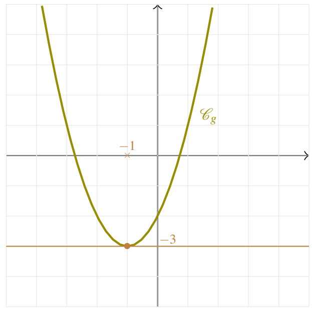
! Une fonction peut ne pas admettre de minimum (ou de maximum). Par contre, quand il existe, le maximum est unique. Mais, il peut être atteint en plusieurs valeurs différentes.

On peut voir graphiquement les maxima et minima d'une fonction :

- m est un minimum de f si la courbe représentative de f est au-dessus de la droite $y = m$ et si les deux courbes se touchent.
- M est un maximum de f si la courbe représentative de f est au-dessous de la droite $y = M$ et si les deux courbes se touchent.



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos(x)$.
Maximum de f : 2 ; atteint seulement en $x = 0$
Minimum de f : 0 ; atteint en $x = -\pi$ et $x = \pi$



Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x - 2$.
g n'a pas de maximum
Minimum de g : -3 ; atteint seulement en $x = -1$

Exemple 2.13

Fonction	Minorant	Majorant	Minimum	Maximum
$x \mapsto x^2$	$0, -1, \dots$	Non	0 (atteint en 0)	Non
$x \mapsto x^3$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \frac{1}{x}$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \ln(x)$	Non	Non	Non	Non
$x \mapsto \exp(x)$	$0, -2, \dots$	Non	Non	Non

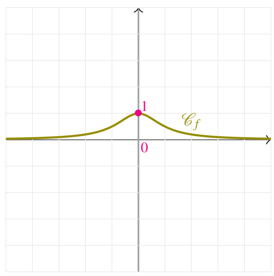
Pour étudier les extrema d'une fonction, on peut dresser son tableau de variations.

Exemple 2.14 Étudions les extrema de la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule jamais. Ensuite, on trace son tableau de variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$		$+$	0	$-$	
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Comme f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, elle admet en maximum en $x = 0$ qui vaut $f(0) = 1$.

3 Fonctions usuelles

3.1 La fonction inverse

Définition 3.1 La fonction *inverse* est la fonction suivante :

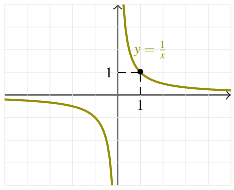
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Proposition 3.2 — Propriétés de la fonction inverse.

- Le domaine de définition de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse est impaire.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- La fonction inverse admet pas de majorant, pas de minorant et pas d'extrema.

! La fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0



3.2 La fonction racine carrée

Définition 3.3 La fonction *racine carrée* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y = \sqrt{x}$ est l'unique réel positif tel que $y^2 = x$.

Proposition 3.4 — Propriétés de la fonction racine carrée.

- Le domaine de définition de la fonction racine carrée est $\mathbb{R}_+$.
- La fonction racine carrée est ni paire, ni impaire.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction racine carrée admet pas de majorant, des minorants $(0, -1, -2, \ldots)$, pas de maximum et un minimum 0 atteint en $x = 0$.

Démonstration. Prouvons que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x < y$. Montrons que $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. Pour cela, on va montrer que $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$. On a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

(Quand on considère une expression de la forme $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, il est souvent utile de faire apparaître son expression conjuguée $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ comme au-dessus. De plus, comme $y > x \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $\sqrt{y} > 0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais et l'expression précédente est bien licite.)
En utilisant l'identité remarquable "$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$", on obtient alors,

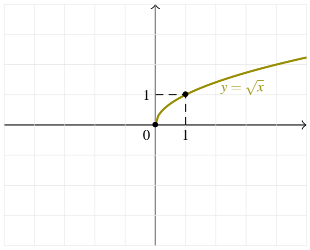
$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Par définition de la fonction racine carrée, on obtient,

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Comme $x < y$, on obtient donc que $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$, c'est-à-dire $\sqrt{x} < \sqrt{y}$, ce qui conclut la preuve. ■

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$			$+\infty$
	0	$\nearrow$	



3.3 La fonction valeur absolue

Définition 3.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. La *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

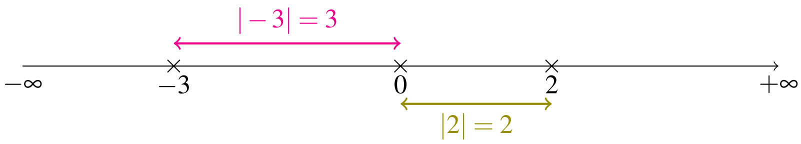
Exemple 3.6 On a

$$|17| = 17, \quad |-3| = 3, \quad \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}, \quad |\pi - 3| = \pi - 3, \quad |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$$

Exemple 3.7

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|(x-1)^2\right| = (x-1)^2$.
- Pour tout $x \geqslant -4$, on a $|-x-4| = x+4$.

? La valeur absolue de x représente la distance entre 0 et le nombre x sur la droite réelle.



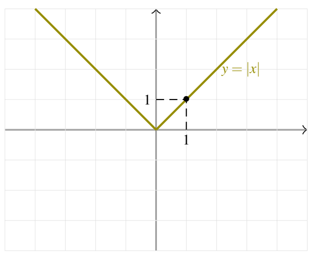
Définition 3.8 La fonction *valeur absolue* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

Proposition 3.9 — Propriétés de la fonction valeur absolue.

- Le domaine de définition de la fonction valeur absolue est $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue est paire.
- La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction valeur absolue admet pas de majorant, des minorants $(0, -12, \dots)$, pas de maximum et un minimum 0 atteint en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \lvert x \rvert$	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Proposition 3.10 — Règles de calcul pour la valeur absolue.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|-x| = |x|$.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|xy| = |x| \times |y|$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $|x^n| = |x|^n$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

! Attention, $|x+y| \neq |x|+|y|$. Par exemple,

$$|-1+2| = |1| = 1 \quad \text{alors que} \quad |-1|+|2| = 1+2 = 3.$$

Exemple 3.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{|-1|^n}{|n|} = \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Exemple 3.12 Considérons la fonction suivante

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |3-2x| \end{array}$$

Donnons une expression de f sans utiliser de valeur absolue. *Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que composée des deux fonctions $x \mapsto 3-2x$ et $x \mapsto |x|$ qui sont bien définies sur $\mathbb{R}$.*

- Lorsque $3-2x \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant \frac{3}{2}$, on a $f(x) = |3-2x| = 3-2x$.
- Lorsque $3-2x \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant \frac{3}{2}$, on a $f(x) = |3-2x| = -(3-2x) = -3+2x$.

Donc, finalement, la fonction f s'écrit

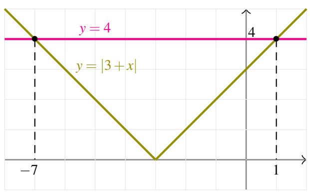
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 3-2x & \text{si } x \leqslant \frac{3}{2} \\ -3+2x & \text{si } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}$$

Proposition 3.13 — Équation avec valeur absolue. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$|x| = a \quad \Leftrightarrow \quad x = a \quad \text{ou} \quad x = -a.$$

Exemple 3.14 Résoudre l'équation $|3+x| = 4$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |3+x| = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad |3+x| = |4| \\ &\Leftrightarrow \quad 3+x = 4 \text{ ou } 3+x = -4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -7. \end{aligned}$$



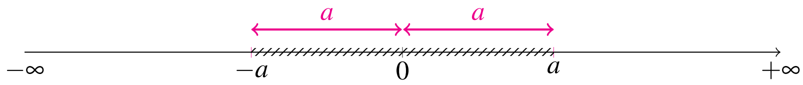
Cette équation admet exactement deux solutions, données par 1 et -7.

Proposition 3.15 — Inéquation avec valeur absolue. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a

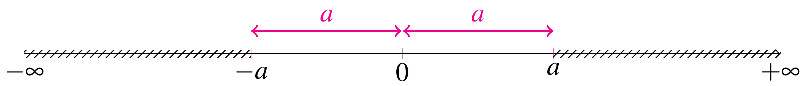
1. $|x| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a.$
2. $|x| \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a.$

! Les mêmes équivalences sont vraies avec des inégalités strictes à la place des inégalités larges.

Résoudre l'inéquation $|x| \leqslant a$ revient à chercher les points dont la distance à zéro est inférieure à a.

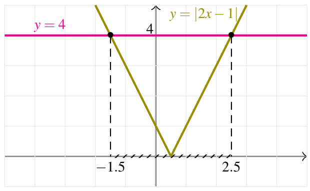


Résoudre l'inéquation $|x| \geqslant a$ revient à chercher les points dont la distance à zéro est supérieure à a.



Exemple 3.16 Résoudre l'inéquation $|2x-1| \leqslant 4$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |2x-1| \leqslant 4 &\Leftrightarrow -4 \leqslant 2x-1 \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow -3 \leqslant 2x \leqslant 5 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

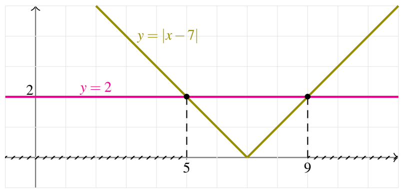


L'ensemble des solutions de cette équation est donné par $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Exemple 3.17 Résoudre l'inéquation $|x-7| > 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |x-7| > 2 &\Leftrightarrow x-7 > 2 \text{ ou } x-7 < -2 \\ &\Leftrightarrow x > 9 \text{ ou } x < 5 \end{aligned}$$

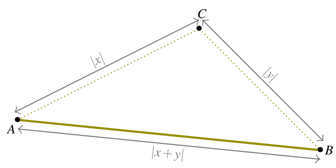


L'ensemble des solutions de cette équation est donné par $]-\infty, 5[\cup]9, \infty[$.

Proposition 3.18 — Inégalité triangulaire. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Ce théorème traduit le fait que la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite : le plus efficace pour aller d'un point A à un point B est d'aller tout droit, sans passer par un troisième point C qui ne serait pas sur la ligne droite.



3.4 La fonction partie entière

Définition 3.19 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n est appelé la *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.
Autrement dit, la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exemple 3.20 Calculer les parties entières suivantes.

$$\lfloor 2.5 \rfloor = 2, \qquad \lfloor -1.3 \rfloor = -2, \qquad \lfloor 1 \rfloor = 1, \qquad \lfloor \pi \rfloor = 3.$$

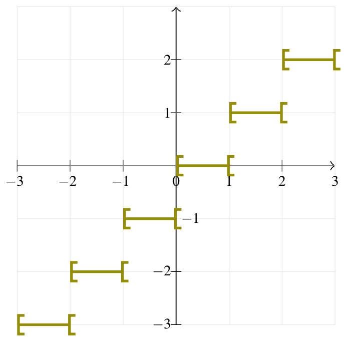
Définition 3.21 La fonction *partie entière* est la fonction suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

Proposition 3.22 — Propriétés de la fonction partie entière.

- Le domaine de définition de la fonction partie entière est $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière est ni paire, ni impaire.
- La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière n'admet pas de majorant, ni de minorant, ni d'extrema.

! La fonction partie entière n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $2 < 2.5$ mais $\lfloor 2 \rfloor = 2 = \lfloor 2.5 \rfloor$. Elle est constante sur tous les intervalles de la forme $[n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$. On dit qu'elle est constante par morceaux.



! La fonction partie entière est une fonction en escalier, elle est discontinue en tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.23 Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x vérifie l'inégalité suivante :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Démonstration. Par définition, la partie entière vérifie les deux inégalités suivantes :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

On en déduit donc que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \qquad \text{et} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor,$$

ce qui donne le résultat. ■

3.5 La fonction logarithme

Définition 3.24 La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Autrement dit, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

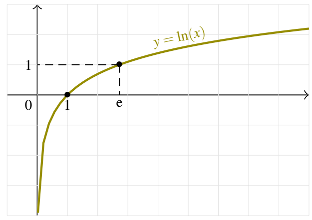
Proposition 3.25 — Valeurs particulières.

1. Par définition, on a $\ln(1) = 0$.
2. Il existe un unique réel $\mathrm{e} \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. On a $2 < \mathrm{e} < 3$ (en fait $\mathrm{e} \approx 2.72$). Ce nombre est appelé le nombre d'Euler.

Proposition 3.26 — Propriétés de la fonction logarithme.

- Le domaine de définition du logarithme est $]0, +\infty[$.
- La fonction logarithme est ni paire, ni impaire.
- La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction logarithme n'admet pas de majorant, ni de minorant, ni d'extrema.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Proposition 3.27 — Relation fondamentale. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Proposition 3.28 — Propriétés algébriques. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

1. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,
3. $\ln(x^n) = n\ln(x)$,
4. $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Démonstration. Prouvons la première propriété. Soit $x \in]0,+\infty[$. *Comme* $\frac{1}{x}$ *est dans* $]0,+\infty[$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ *est bien défini*. De plus, en utilisant la relation de la Proposition 3.27, on a

$$\ln(1) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\ln(1) = 0$ donc on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

■

Exemple 3.29 Écrire $\ln(12)$ sous la forme $a\ln(2) + b\ln(3)$ (avec a et b des entiers relatifs).

$$\ln(12) = \ln(2^2 \times 3) = \ln(2^2) + \ln(3) = 2\ln(2) + \ln(3).$$

Exemple 3.30 Écrire $\ln\left(\frac{16}{3}\right)$ sous la forme $a\ln(2) + b\ln(3)$ (avec a et b des entiers relatifs).

$$\ln\left(\frac{16}{3}\right) = \ln(16) - \ln(3) = \ln(2^4) - \ln(3) = 4\ln(2) - \ln(3).$$

Exemple 3.31 Écrire $4\ln(2) + \ln(3) + 2$ sous la forme $\ln(b)$ (on pourra utiliser le nombre e).

$$\begin{aligned} 4\ln(2) + \ln(3) + 2 &= 4\ln(2) + \ln(3) + 2\ln(\mathrm{e}) \\ &= \ln(2^4) + \ln(3) + \ln(\mathrm{e}^2) = \ln(2^4 \times 3 \times \mathrm{e}^2) = \ln(48\mathrm{e}^2) \end{aligned}$$

Proposition 3.32 — Logarithme et inégalité. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y, \qquad \ln(x) \leqslant \ln(y) \Leftrightarrow x \leqslant y, \qquad \ln(x) \geqslant \ln(y) \Leftrightarrow x \geqslant y.$$

3.6 La fonction exponentielle

Définition 3.33 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique t dans $]0,+\infty[$ tel que $\ln(t) = x$, que l'on note $\exp(x)$ ou e^x. On a donc

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(x)) = x.$$

! Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Proposition 3.34 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0,+\infty[$. On a
$$\ln(t) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \exp(x).$$
En particulier,
$$\text{pour tout } t \text{ dans }]0,+\infty[, \qquad \exp(\ln(t)) = t.$$

Définition 3.35 La fonction *exponentielle* est la fonction suivante :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Proposition 3.36 — Valeurs particulières.
1. On a $\exp(0) = 1$.
2. On a $\exp(1) = \mathrm{e}$ (on rappelle que $\mathrm{e} \approx 2.72$ est appelé le nombre d'Euler).

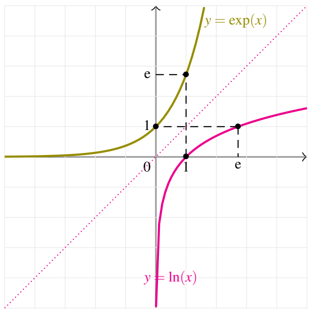
Démonstration.

1. On a $\ln(1) = 0$ donc $\exp(0) = 1$.
2. On a $\ln(\mathrm{e}) = 1$ donc $\exp(1) = \mathrm{e}$.

■

Proposition 3.37 — Propriétés de la fonction exponentielle.
- Le domaine de définition de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est ni paire, ni impaire.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle admet pas de majorant, des minorants $(0, -2.1, \dots)$ et pas d'extrema.

x	$-\infty$ ⟶ $+\infty$
$\exp(x)$	0 ↗ $+\infty$



Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 3.38 — Relation fondamentale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Proposition 3.39 — Propriétés algébriques. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a
1. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
2. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$,
3. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Ces propriétés algébriques sont les mêmes que pour les puissances, cela justifie la notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$:

$$e^x \times e^y = e^{x+y}, \qquad (e^x)^n = e^{nx}, \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \qquad \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

Exemple 3.40 Écrire $e^5e^{-4}e^2$ sous la forme e^k avec k le plus simple possible.

$$e^5e^{-4}e^2 = e^{5-4+2} = e^3.$$

Exemple 3.41 Écrire $\frac{1}{e^6e^4}$ sous la forme e^k avec k le plus simple possible.

$$\frac{1}{e^6e^4} = e^{-6}e^{-4} = e^{-6-4} = e^{-10}.$$

Exemple 3.42 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression suivante : $(4e^x + e^{-x})^2$.

$$(4e^x + e^{-x})^2 = (4e^x)^2 + 2 \times 4e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 = 16e^{2x} + 8 + e^{-2x}$$

Exemple 3.43 Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum l'expression suivante : $e^{9x} + e^{2x}$.

$$e^{9x} + e^{2x} = e^{7x+2x} + e^{2x} = e^{7x}e^{2x} + e^{2x} = e^{2x}(e^{7x} + 1).$$

3.7 Les fonctions puissances entières

Définition 3.44 Soit n un entier naturel. La fonction *puissance* n est la fonction suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

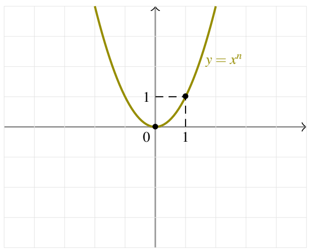
où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Cas où n est pair.

Proposition 3.45 — Propriétés de la fonction puissance entière, cas pair.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance est paire.
- La fonction puissance est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction puissance n'admet pas de majorant, des minorants $(0, -1, \dots)$, pas de maximum et un minimum 0 atteint en $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^n	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

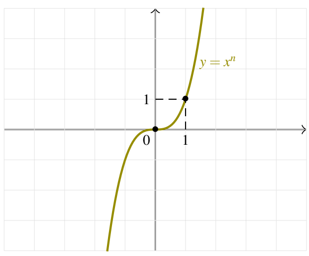


Cas où n est impair.

Proposition 3.46 — Propriétés de la fonction puissance entière, cas impair.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance est impaire.
- La fonction puissance est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction puissance n'admet pas de majorant, pas de minorant et pas d'extrema.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^n	$-\infty$ ↗		$+\infty$



3.8 Les fonctions puissances réelles

La propriété du logarithme $\ln(x^n) = n\ln(x)$ entraine, en composant par l'exponentielle, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$x^n = \exp(n\ln(x)).$$

Cela nous permet d'étendre la notion de puissance pour des valeurs de n non entières et pour des réels x strictement positifs.

Définition 3.47 Soit a un réel. La fonction *puissance* a est la fonction suivante

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}$$

La fonction puissance a n'est définie que sur $]0,+\infty[$.

Exemple 3.48 Soient $x \in]0,+\infty[$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$x^1 = x, \qquad x^0 = 1, \qquad x^\pi = e^{\pi\ln(x)}, \qquad 1^a = 1$$

Proposition 3.49

1. Lorsque a est un entier, la fonction puissance a coïncide avec la fonction puissance définie pour les entiers, c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$,
$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = e^{n\ln(x)}.$$
2. La fonction puissance $\frac{1}{2}$ coïncide avec la fonction racine carrée, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, on a
$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$
3. La fonction puissance -1 coïncide avec la fonction inverse, c'est-à-dire que pour tout $x > 0$, on a
$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

On retrouve les mêmes propriétés algébriques que pour les puissances entières.

Proposition 3.50 — Règles de calcul sur les puissances. Soient $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

1. Multiplication de puissances : $x^a \times x^b = x^{a+b}$.
2. Puissance d'une puissance : $(x^a)^b = x^{a\times b}$.
3. Fraction de puissances : $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$.
4. Produit de puissances : $(x \times y)^a = x^a \times y^a$.
5. Puissance d'une fraction : $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$.

Exemple 3.51 Calculer les puissances suivantes.

$$2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{12}} \qquad 2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{4}} = (2\times 3)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}}$$

$$(5^{\frac{1}{4}})^4 = 5^{\frac{1}{4}\times 4} = 5^1 = 5 \qquad \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$$

Les règles de calcul concernant les fonctions exponentielle, logarithme et puissances entières s'étendent aux puissances non entières.

Proposition 3.52

1. Pour tout a réel et $x > 0$, on a $\ln(x^a) = a\ln(x)$.
2. Pour tout a réel et $x \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{e}^x)^a = \mathrm{e}^{ax}$.

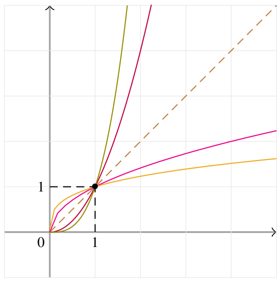
Cas où $a > 0$

Par exemple, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$,...

Proposition 3.53 — Propriétés de la fonction puissance, cas $a > 0$.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est ni paire, ni impaire.
- La fonction puissance est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance admet pas de majorant, des minorants $(0, -1, \ldots)$ et pas d'extrema.

x	0		1		$+\infty$
x^a	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Cas où $a < 0$

Par exemple, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$,...

Proposition 3.54 — Propriétés de la fonction puissance, cas $a < 0$.

- Le domaine de définition de la fonction puissance est $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance est ni paire, ni impaire.
- La fonction puissance est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- La fonction puissance admet pas de majorant, des minorants $(0, -1, \ldots)$ et pas d'extrema.

x	0		1		$+\infty$
x^a	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0