TD 09 – LIMITE DE SUITES (CORRECTION)

Exercice 1 – . 1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$
3. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
4. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
5. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
6. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
7. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$
8. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
9. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
10. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 2 – . **1.** Soit $m \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{-4n\left(-\frac{1}{4n}+1\right)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n}-1}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \frac{3^n}{2}$
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{\ln 3}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to+\infty} n+(-1)^n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\ln(n) = 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n} \\ &= \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n^2+2+n}} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

8. $u_n = \dfrac{a^n \times \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \times \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \dfrac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 3 – . **1.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrons $P(n)$ **:** " $0 < u_n < 1$ ".

- Initialisation: Montrons que $P(1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 < v_1 < 1$.

on a $u_1 = \frac{u_0+1}{3-u_0} = \frac{0+1}{3-0} = \frac{1}{3}$

donc $u_1 = \frac{1}{3} \in \left]0,1\right[$

donc $P(1)$ vraie.

- Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on suppose que $P(n)$ est vraie, c-a-d que $0 < u_m < 1$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c-a-d que $0 < u_{n+1} < 1$.

on sait que $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}$. or $0 < u_n < 1$

$$\begin{aligned}
&\text{donc } 1 < u_n + 1 < 2\\
&\text{et } 2 < 3 - u_n < 3\\
&\text{donc } \frac{1}{3} < \frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{2}\\
&\text{donc } \frac{1}{3}1 < \frac{u_{n+1}}{3-u_n} < \frac{1}{2} \times 2\\
&\text{c-a-d } \frac{1}{3} < u_{n+1} < 1\\
&\text{donc } 0 < u_{n+1} < 1
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ et vraie.

Conclusion: Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.

2.a) D'après la question 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \neq 1$ et on a aussi $u_0 \neq 1$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n$ existe.

b) comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$ si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors

$$0 \leqslant l \leqslant 1.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}.0n$ a

$$\begin{aligned}
v_n + 1 - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}\\
&= \frac{1}{\frac{u_n+1}{3-u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}\\
&= \frac{3 - u_n}{u_n + 1 - (3 - u_n)} - \frac{1}{u_n - 1}\\
&= \frac{3 - u_n}{-2 + 2u_n} - \frac{1}{u_n - 1}\\
&= \frac{3 - u_n - 2}{2(u_n - 1)}\\
&= \frac{1 - u_n}{2(u_n - 1)}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$

d) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 - \frac{n}{2} \\ &= -1 - \frac{n}{2} \\ &= -\frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{v_n} + 1 \\ &= -\frac{2}{n+2} + 1 \end{aligned}$$

f) Donc la suite $(u_n)_n$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 4 – . **1.** Recurrence (...)
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 3 \\ &\geqslant -\frac{1}{2} \times 6 + 3 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc la suite est croissante.
3. La suite (u_n) est:
* majorée (par 6)
* croissante
Donc par théorème de la limite monotone, la suite (u_n) admet une limite finie que l'on note l.
4. D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

Donc en passant à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2}l + 3 \\ \frac{1}{2}l &= 3 \\ l &= 6. \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) converge vers 6 .
5. La suite $(u_n)_n$ est arithmético-géométrique. En déroulant la méthode, on obtient.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

Donc la suite $(u_n)_n$ converge vers 6 car

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Exercice 5 – .

Exercice 6 – . **1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = {u_n}^4 \geqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

2. Comme la suite (u_n) est croissante,
- soit (u_n) est majoré et la suite converge vers un nombre réel l
- soit la suite diverge vers $+\infty$.
3.Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: " $u_n \geqslant 1$ ".
- Initialisation: Montrons que $P(0)$ est raie, c'est-à-dire que $u_0 \geqslant 1$ on a $u_0 \geqslant 1$
Donc $P(0)$ vraie.
-. Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $P(n)$ est vraie, c-a-d que $u_n \geqslant 1$
Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c-a-d que $u_{n+1} \geqslant 1$
On a $u_{n+1} = u_n + {u_n}^4$.
or $u_n \geq 1$ par hyp de récurrence
donc ${u_m}^4 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^4$ croissante sur $\mathbb{R}^+$
donc $u_n + u_n^4 \geq 2$
donc $u_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion: Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \geqslant 1$.
4. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + {u_n}^4$ en passant à la limite, on obtiendrait $l = l + l^4$ et donc $l = 0$.
5. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$,
- d'après la question 4, nécessairement $l = 0$
- d'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ et donc en passant à la limite, $l \geqslant 1$
Ceci est contradictoire Donc $(u_n)_n$ ne peut pas converger vers un $l \in \mathbb{R}$.
6. En utilisant les questions 2 et 5 , on obtient que nécesairement, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 7 – . 1. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{e}{n+1} \times \frac{e^n}{n!} \\ &= \frac{e}{n+1} \times u_n \end{aligned}$$

Or $\quad m \geqslant 2$
donc $\quad n+1 \geqslant 3$
donc $\quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} \quad$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$
donc $\quad \frac{e}{m+1} \leq \frac{e}{3} \quad$ car $e > 0$
Finalement,

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{e}{3} u_n$$

2. Par définition de la suite, on a déjà

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{e^n}{m!} \geqslant 0.$$

Démontrons par récurrence que
$\forall n \geqslant 2, \quad \mathcal{P}(n): \quad "u_n \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2"$
- Initialisation : On a

$$\left(\frac{e}{3}\right)^{2-2} u_2 = \left(\frac{e}{3}\right)^0 u_2 = 1 \times u_2 = u_2 \geqslant u_2$$

donc $P(2)$ et vraie.
- Hérédité :
On suppose $P(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 2$,c-a-d $\quad u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2} u_2$
On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie c-a-d $\quad u_{n+1} \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} u_2$,
on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant \frac{e}{3}u_n \\ &\leqslant \frac{e}{3}\times\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2}u_2 \\ &\leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}u_2 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion (...)
3. D'après la question 2 ,

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^{n-2}u_2$$

Or,
- la suite $(0)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0
- la suite $\left(\left(\frac{e}{3}\right)^{n-2}u_2\right)$ converge vers 0 car suite géométrique de raison

$$-1 < q = \frac{e}{3} < 1 \quad (e \approx 2.7)$$

Donc par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_n$ admet une limite finie qui vaut 0 .

Exercice 8 – . Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{gathered} x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \\ 2x-1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x \\ 3x-1 < \lfloor 3x \rfloor \leqslant 3x \\ (\cdots) \\ nx-1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \end{gathered}$$

Donc en sommant toutes ces inégalités, on obtient

$$x+2x++nx-1\ldots-1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor \leqslant x+2x+\ldots+nx$$

Or $\quad x+2x+\ldots+nx-1\ldots-1 = x(1+2+\ldots+n)-n = x\frac{n(n+1)}{2}-n$
Et $\quad x+2x+\ldots+nx = x(1+2+\ldots+n) = x\frac{n(n+1)}{2}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2}-n\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{xn(n+1)}{2n^2}$$

c-a-d $\quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$,
$\frac{x}{2}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$
On les deux suites $\left(\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{x}{2}$.
Donc par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie qui vaut $\frac{x}{2}$.

Exercice 9 – .

Exercice 10 – .

Exercice 11 – .

Exercice 12 – .