

## TD 13 – FACTORIELLES & COEFF. BINOMIAUX

**Exercice 1 – Calcul de factorielles (le retour !).** Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

a)  $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$     b)  $n(n-1)(n-2)$     c)  $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$     d)  $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$

**Exercice 2 – Calcul de coefficients binomiaux.** Calculer les quantités suivantes

1.  $\binom{8}{3}$     2.  $\binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$     3.  $\frac{\binom{10}{7}}{\binom{10}{4}}$     4.  $\frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

**Exercice 3 – Binôme de Newton.** Soient  $x, a, b \in \mathbb{R}$ . Développer les quantités suivantes

a.  $(a+b)^6$     b.  $(2-x)^5$     c.  $(2x+1)^4$     d.  $(x^2+2)^3$

**Exercice 4 – Calcul de somme.**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes

1.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ ,    2.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$     3.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

**Exercice 5 – Un peu de calcul.** Montrer que

$$\forall 0 \leq p \leq k \leq n, \quad \binom{n}{k} \binom{k}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}.$$

**Exercice 6 – Un peu de dénombrement.** Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Combien existe-t-il d'anagrammes de "Maison", de "Mississippi" et de "Abracadabra" ?
- Dans un groupe de  $n$  personnes, tout le monde se serre la main. Quel est le nombre de poignées de mains ? *On pourra commencer par comprendre ce qu'il se passe pour  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 4, \dots$*
- Quatre athlètes participent à une finale olympique. Combien de classements sont possibles pour cette finale.

**Exercice 7 – Un peu de dénombrement, bis.** On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien de tirages vérifient les conditions suivantes ?

- Aucune condition supplémentaire.
- Il y a au moins une carte pique parmi les cinq cartes.
- Il y a exactement deux valets.
- Il y a exactement un as et deux carreaux.
- Les cinq cartes sont de la même couleur.

**Exercice 8 – Dénombrement - Bonus.** Quelle est la probabilité que deux personnes aient la même date de naissance dans la classe (sachant qu'il y a 19 élèves et que l'on considèrera qu'une année comporte 365 jours) ?