TD 04 – Somme & Produit

Comprendre la notation $\sum$

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des $\cdots$ (on ne demande pas de calculer ses sommes).

$$\sum_{k=1}^{20} k^3 \qquad \sum_{\ell=2}^{8} 3\ell \qquad \sum_{i=1}^{n} (-x)^i \qquad \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1)$$

$\sum_{k=1}^{20} k^3 = 1+2^3+3^3+\dots+20^3$

$\sum_{\ell=2}^{8} 3\ell = 3\times2+3\times3+\dots+3\times8$

$\sum_{i=1}^{n} (-x)^i = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n$

$\sum_{j=2}^{n+1} \ln(j-1) = \ln(1)+\ln(2)+\dots+\ln(n)$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

- $2+4+6+8+\cdots+50$
- $1+2^6+3^6+4^6+\cdots+(n+1)^6$ (pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné)
- $1-a+a^2-a^3+\cdots+a^{100}$ (pour un $a \in \mathbb{R}^*$ donné)

- $2+4+6+8+\dots+50 = 2\times1+2\times2+2\times3+2\times4+\dots+2\times25 = \sum_{k=1}^{25} 2k$
- $1+2^6+3^6+4^6+\dots+(n+1)^6 = \sum_{k=1}^{n+1} k^6$
- $1-a+a^2-a^3+\dots+a^{100} = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k a^k$

Les sommes de références

Commencez par remplir le tableau suivant.

Nom de la somme	Somme	Valeur
Somme d'une constante	$\sum_{k=p}^{q} a$	$a \times (q-p+1)$
Somme des entiers	$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n\times(n+1)}{2}$
Somme des entiers au carré	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Somme géométrique	$\sum_{k=p}^{q} x^k$	• si $x\neq 1$: $x^p \times \frac{1-x^{q-p+1}}{1-x}$ / si $x=1$: $q-p+1$

Exercice 3 – En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{i=0}^{n} 4i \qquad \sum_{k=2}^{n+1} 3 \qquad \sum_{j=1}^{n-1} 2^j$$

$$\sum_{\ell=4}^{n} \frac{\ell-1}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \qquad \sum_{i=1}^{2N} i(2i+3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-j} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{10^k} \qquad \sum_{k=13}^{42} k$$

$$\sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{2^\ell}{3^{\ell-2}} \qquad \sum_{j=1}^{n-1} (5j+2-n) \qquad \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$$

• $\sum_{i=0}^{n} 4i = 4\sum_{i=0}^{n} i = 2n(n+1)$

• $\sum_{\ell=4}^{n} \frac{\ell-1}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{\ell=4}^{n} \ell - \sum_{\ell=4}^{n} 1\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \ell - 1 - 2 - 3 - (n-4+1)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 6 - n + 3\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1) - 2(n+3)}{2}\right)$

$= \frac{n^2+n-2n-6}{8}$

$= \frac{n^2-n-6}{8}$

$\boxed{\sum_{k=2}^{n+1} 3 = 3\times(n+1-2+1) = 3n}$

• $\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = x \times \sum_{k=0}^{n} (x^2)^k$

si $x \neq 1$ $= x \times \frac{1-(x^2)^{n-0+1}}{1-x^2}$

$= x \times \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$

si $x = 1$ $= n-0+1$

$= n+1$

• $\sum_{j=1}^{n-1} 2^j = 2^1 \times \frac{1-2^{n-1-1+1}}{1-2}$

$= 2 \times (2^{n-1} - 1)$

$= 2^n - 2$

• $\sum_{i=1}^{2N} i(2i+3) = 2 \times \frac{2N(2N+1)(4N+1)}{6} + 3\,\frac{2N(2N+1)}{2}$

$= \frac{2N(2N+1)}{6}\left[2(4N+1)+9\right]$

$= \frac{N(2N+1)(8N+11)}{3}$

$$\sum_{j=1}^{n} e^{-j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^j = \frac{1}{e}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$$

$$\sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{2^\ell}{3^{\ell-2}} = 9\sum_{\ell=4}^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^\ell = 9\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-4+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{16}{9}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{\frac{1}{3}} = \frac{16}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{10^k} = 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 3\times\left(\frac{1}{10}\right)^0\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{10}} = 3\times\frac{10}{9}\times\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right) = \frac{10}{3}\times\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}(5j+2-n) = 5\times\frac{(n-1)n}{2}+(2-n)(n-1-1+1) = 5\,\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)(n-2) = (n-1)\left[\frac{5n}{2}-n+2\right] = \frac{n-1}{2}\left[5n-2n+4\right] = \frac{(n-1)(3n+4)}{2}$$

$$\sum_{k=13}^{42} k = \sum_{k=1}^{42} k - \sum_{k=1}^{12} k = \frac{42\times43}{2}-\frac{12\times13}{2} = 21\times43-6\times13 = 903-78 = 825$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{3}\cdot\left(5^n-\frac{2^{n+1}}{5}\right) = \frac{1}{3}\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)$$

Exercice 4 – En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

$2+4+6+\cdots+100$ $\qquad$ $1+3+5\cdots+99$

$1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n$ $\qquad$ $2\times 5^2+2\times 5^3+\cdots+2\times 5^{2n+2}$

- $2+4+\ldots+100 = 2\sum_{k=1}^{50} k = 2\,\frac{50\times 51}{2} = 2550$

- $1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k$
  - si $x=1$: $1\times(n-0+1) = n+1$
  - si $x\neq 1$: $\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

- $1+3+5+\ldots+99 = \sum_{k=0}^{49}(2k+1) = 2\times\frac{49\times 50}{2} + (49-0+1) = 2450+50 = 2500$

- $2\times 5^2+\ldots+2\times 5^{2n+2} = 2\sum_{k=2}^{2n+2} 5^k = 2\times 5^2\times\frac{1-5^{2n+2-2+1}}{1-5} = 50\times\frac{1-5^{2n+1}}{-4} = \frac{25}{2}\times\left(5^{2n+1}-1\right)$

Exercice 5 – Démontrez *par récurrence* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On pourra s'appuyer sur la démonstration de la Proposition 1.8 faite en classe.

$n = 1$: $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ ✓

$n \Rightarrow n+1$: $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)$

$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)$

$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

car $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6$
$= 2n^2 + 7n + 6$

Sommes télescopiques

Exercice 6 –

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 7 –

1. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$, on a

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}.$$

Exercice 7 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}$

Indication : faire apparaître un télescopage.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (\ln k - \ln(k+1))$$

$$= -\ln(n+1)$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{i-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right) = \sqrt{n+1}$$

Changement d'indices

Exercice 8 – À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (complétez les trous)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \sum_{i=3}^{n+1} \frac{i}{i-1} \qquad i=k+1 \qquad \sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}$$

$$\sum_{i=2}^{n} (i-2) = \sum_{k=0}^{n-2} k \qquad \cancel{\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) = \sum_{k=1}^{\dots} \cdots}$$

Exercice 9

- $\prod_{i=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$
- $\prod_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^{1+2+\dots+n-1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$
- $\prod_{k=2}^{n} 3x = (3x)^{n-1}$

$\prod_{k=1}^{n} e^k = e^{1+2+\dots+n} = e^{n(n+1)/2}$

Exercice 10

- $\prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k} = \frac{57}{13}$
- $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$

Exercice 11

1) $5\times 6 \times \dots \times 9 = \frac{9!}{4!}$

2) $n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$

3) $2\times 4 \times \dots \times (2n) = 2^n \times n!$

4) $1\times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2\times 4 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

Exercice 12

1) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

2) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = (2n+1)(2n)$

3) $(n+1)! + (n-1)! = (n-1)!\left((n+1)n+1\right) = (n-1)!\,(n^2+n+1)$

Exercice 13

1) $\prod_{j=0}^{n-1} j^2 = 0$

2) $\prod_{k=4}^{n} k^3 = \left(\frac{n!}{3!}\right)^3$

Exercice 14

1) $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (i+j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(i\times p + \frac{p(p+1)}{2}\right)$

$= p\times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} \times n$

$= \frac{np}{2}\left[n+p+2\right]$

2) $V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} j$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2}\right)$

$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right)$

$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\times 6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \dots$

$V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} j$

$= \sum_{j=1}^{n} j^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) Si $x=1$ alors $W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$

Si $x \neq 1$ alors

$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^{i+j}$

$= \sum_{i=1}^{n} x^i \times \sum_{j=1}^{n} x^j$

$= x \times \frac{1-x^n}{1-x} \times x \times \frac{1-x^n}{1-x}$

$= \left(x \times \frac{1-x^n}{1-x}\right)^2$