TD 14 – Limites de fonction

Exercice 1 – Calculs de limite, sans FI. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{x^3}$
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$
3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{9}{x\sqrt{x}}$
5) $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^5 + \frac{6}{x} + 13$
6) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+1}$
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$
8) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x^2+2x+1}{x-2}$
9) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-2x-5}{\sqrt{x-3}}$
10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(1+\sqrt{x})$

Exercice 2 – Calculs de limite, avec FI. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3+x}{x^2+1}$
4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+3x-\frac{1}{4x+1}$
5) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$
6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1}$
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)}$
8) $\lim\limits_{x\to -\infty} (6+x^2)e^x$
9) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - e^{2x}$
10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1}$

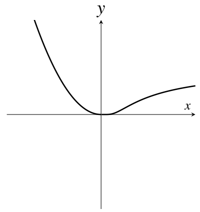
Exercice 3 – Calculs de limite, avec FI. Calculer les limites suivantes.

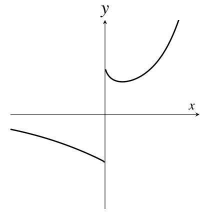
1) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\ln(x-1)$
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$
3) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}$
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1)-\ln(x+4)$
5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2+1)-2\ln(x)$
6) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3+x^2}$

Exercice 4 – Fonctions définies par morceaux. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ x^2 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases} \qquad \forall x\in\mathbb{R}^*,\ g(x)=\begin{cases} e^{x\ln(x)} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

1. Recopier et compléter la rédaction suivante qui permet de déterminer si la fonction f admet une limite en 0.
   - *Étude de la limite en 0^+. Pour tout $x>0$, $f(x) =$* __________ *. Donc,*
     $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
     car (...).
   - *Étude de la limite en 0^-. Pour tout $x<0$, $f(x) =$* __________ *. Donc,*
     $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
     car (...).
   - *Conclusion. (...)*
2. En reprenant le même schéma de rédaction qu'à la question précédente, déterminer si la fonction g admet une limite en 0. *On admettra que*
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$
3. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, déterminer celle représentative de la fonction f et celle représentative de la fonction g. Vérifier la cohérence des résultats des questions précédentes.





Exercice 5 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad f(x)=\ln(x)\times\ln(\ln(x)).$$

1. Déterminer son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer les limites de f aux extrémités de $\mathscr{D}_f$.

Exercice 6 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

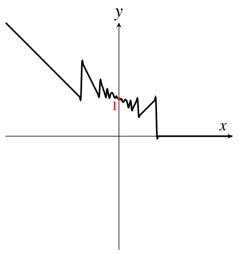
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

1. Déterminer son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Déterminer les limites de f aux extrémités de $\mathscr{D}_f$.

Exercice 7 – Étude de fonction. *On rappelle que la partie entière d'un nombre x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Autrement dit, c'est le plus entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.*
On définit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1. Le courbe de la fonction f est représentée ci-dessous. Que conjecture-t-on sur les limites en $-\infty$, $+\infty$ et 0 ?



2. (a) Justifier que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$.
   (b) En déduire, une expression simple de $f(x)$ (ne faisant pas intervenir de partie entière) pour tout $x > 1$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. De la même manière, donner une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \geqslant -1$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. (a) Montrer que
   $$\forall x \in]0,1[, \quad 1 - x < f(x) \leqslant 1.$$
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
   (c) Montrer que
   $$\forall x \in]-1,0[, \quad 1 \leqslant f(x) < 1 - x.$$
   (d) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
   (e) La fonction f admet une limite en 0 ?

Exercice 8 – Théorème de la limite monotone. Soient f une fonction décroissance définie sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x.$$

Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$$

Exercice 9 – Théorème de la limite monotone. Soit f une fonction croissante sur $]0,1[$. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la fonction f admet une limite finie ℓ à droite en a qui vérifie $f(a) \leqslant \ell$.

Exercice 10 – Des limites, encore... Déterminer les limites suivantes.

$$1)\ \lim_{x \to 0} (\ln(\mathrm{e} + x))^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad 2)\ \lim_{x \to +\infty} (\ln(1 + \mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$$

On rappelle que lorsque l'inconnue x est en exposant, il faut travailler avec la forme exponentielle de la fonction.

Exercice 11 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^-.
3. Déterminer la limite de $u\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$ quand $u \to 0^+$.
4. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^+$. *On utilisera le fait que pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.*