Chapitre 10 : Notion d'ensembles

1 Notion d'ensemble

1.1 Mode de définition d'un ensemble

Définition 1.1

- Un **ensemble** E est une collection d'objets, appelés **éléments** de E.
- Si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x **appartient** à E, et on note $x \in E$.
- Si x n'est pas un élément de l'ensemble E, on dit que x **n'appartient pas** à E, et on note $x \notin E$.

Ensemble	... $\in$ ...	... $\notin$ ...
$\mathbb{R}$	$1 \in \mathbb{R}$	$i \notin \mathbb{R}$ (nbre complexe)
$\mathbb{Z}$	$-2 \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{N}$	$4 \in \mathbb{N}$	$-1 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^*$	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$	$0 \notin \mathbb{R}^*$
$[0,1]$	$\frac{1}{3} \in [0,1]$	$10 \notin [0,1]$
$\mathbb{R}[x]$	$x \mapsto x^3+1 \in \mathbb{R}[x]$	$x \mapsto \ln(x) \notin \mathbb{R}[x]$
$\mathbb{R}_2[x]$	$x \mapsto x^2+1 \in \mathbb{R}_2[x]$	$x \mapsto x^4 \notin \mathbb{R}_2[x]$
$\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Modes de définition d'un ensemble.

- Pour définir un ensemble, on peut tout simplement faire la **liste** de ces éléments. Dans ce cas l'ordre n'a pas d'importance. Par exemple, si on note
$$E = \{1,2,3\}$$
alors E est l'ensemble constitué des éléments 1, 2 et 3. De la même manière, si on note
$$\text{ECG1} = \{\text{Arthur, Martin}, \dots, \text{Thomas}\}$$
alors ECG1 est l'ensemble constitué de tous les élèves de la classe.
- Quand les ensembles comportent beaucoup d'éléments (parfois même une infinité...), il est trop long de tous les lister. Pour avoir une notation compacte d'un ensemble, on peut utiliser les deux autres modes de définition suivant.

Forme **conditionnelle** avec une propriété $\mathcal{P}$	Forme **paramétrique** avec un paramètre
$F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$	$G = \{f(x) \mid x \in I\}$
F est l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété $\mathcal{P}$	G est l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent $f(x)$ avec $x \in I$.
$x \in F \iff \mathcal{P}(x)$ est vraie	$y \in G \iff$ il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$

Exemple 1.2

Ensemble	Éléments	... $\notin$ ...
$E = \{\text{élève} \in \text{ECG1} \mid \text{élève fait allemand}\}$	Martin, Sarra, Pierre	Arthur $\notin E$
$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$	$-1 \notin E$
$E = [\![1,5]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant 5\}$	$1,2,3,4,5$	$6 \notin E$
$E = \{\text{fonction } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est paire }\}$	$x \mapsto x^2,\ x \mapsto \frac{1}{x^4+1}, \ldots$	$x \mapsto x^3 \notin E$
$E = \{\text{fonction } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = 0\}$	$x \mapsto 1,\ x \mapsto 2, \ldots$	$x \mapsto x \notin E$
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$	$(0,1), (-1,1), (\sqrt{2}, \frac{1}{3}), \ldots$	$1 \notin \mathbb{R}^2$
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$	$(-1,1), (2,-2), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \ldots$	$(0,1) \notin E$
$E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin E$
$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique}\}$	$(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}, (n-1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$	$(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \notin E$
$E = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$	$0, 1, 4, 9, \ldots$	$2 \notin E$
$E = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$	$(-1,1), (2,-2), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \ldots$	$(0,1) \notin E$
$E = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$	$(1,1), (2,4), (\sqrt{2}, 2), \ldots$	$(0,1) \notin E$

Exemple 1.3 On considère les deux ensembles E_1 et E_2 suivants :

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $(4,-3) \in E_1$ mais que $(2,2) \notin E_1$.
2. Montrer que $(2,3) \in E_2$ mais que $(2,4) \notin E_2$.

Gestes Invisibles/Automatismes. L'ensemble E_1 est donné sous forme conditionnelle (appartenance ssi condition vérifiée) tandis que l'ensemble E_2 est donné sous forme paramétrique (appartenance ssi existence d'un paramètre).

1. Le couple $(4,-3) \in E_1$ car

$$4 + (-3) = 1 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

Le couple $(2,2) \notin E_1$ car

$$2 + 2 \neq 1 \qquad (\textit{condition} \text{ non vérifiée})$$

2. Le couple $(2,3) \in E_2$ car

$$\text{il existe un paramètre } a = 2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } (2,3) = (a, a+1) \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

Montrons que $(2,4) \notin E_2$. On va raisonner *par l'absurde*. Supposons que $(2,4) \in E_2$. Alors,

$$\text{il existe un paramètre } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } (2,4) = (a, a+1)$$

Donc, $a = 2$ et $a + 1 = 4$. On obtient alors $a = 2 = 3$. Ceci est absurde. Donc $(2,4) \notin E_2$.

<u>Exemple 1.4</u> Remplacer les ... par le symbole adéquat entre $\in$ et $\notin$ et justifier l'assertion que l'on obtient.

Appartenance ou pas	Justification
$1 \in \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$	car $-1 \leqslant 1 \leqslant 1$
$2 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$	car $2 > 1$
$(2,3) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$	car $3 \neq 2^2$
$(4,2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0\}$	car $4 - 2 \times 2 = 0$
$(1,1,-1) \in \{(t,t,-t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$	car il existe $t = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $(1,1,-1) = (t,t,-t)$
$(2,\sqrt{2},4) \in \{(t,\sqrt{t},t^2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geqslant 0\}$	car il existe $t = 2 \geqslant 0$ tel que $(2,\sqrt{2},4) = (t,\sqrt{t},t^2)$
$x \mapsto x^2 + 2x + 1 \in E_1 = \{P^2 \mid P \in \mathbb{R}_1[x]\}$	car il existe $P : x \mapsto x + 1 \in \mathbb{R}_1[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = P(x)^2$
$x \mapsto x^3 + 1 \notin E_1$	car (raisonnement par l'absurde*)
$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \in E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$	car il existe $a = 4 \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix}$
$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \notin E_2$	car (raisonnement par l'absurde**)

*Montrons que $x \mapsto x^3 + 1 \notin E_1$. Raisonnons *par l'absurde*. On suppose que $x \mapsto x^3 + 1 \in E_1$. Alors,

il existe un paramètre $P \in \mathbb{R}_1[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + 1 = P(x)^2$

En particulier, les degrés de ces deux polynômes sont égaux, c'est-à-dire

$$3 = \deg(P^2) = \deg(P) + \deg(P) = 2$$

Ce qui est absurde. Donc $x \mapsto x^3 + 1 \notin E$.

**Montrons que $M \notin E_2$. Raisonnons *par l'absurde*. On suppose que $M \in E_2$. Alors,

$$\text{il existe un paramètre } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & a \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient,

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ -a & = & 2 \\ 2a & = & -3 \\ a & = & 6 \end{cases}$$

Ce qui est absurde. Donc $M \notin E_2$.

Définition 1.5 — **Ensembles particuliers.**
- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'**ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un **singleton**, et est noté $\{x\}$ lorsque x est l'unique élément de cet ensemble.

1.2 Inclusion d'ensembles

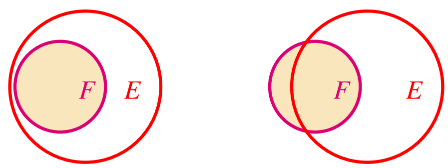
Définition 1.6
- On dit qu'un ensemble F est **inclus** dans un autre ensemble E, si tout élément de F appartient à E :

$$\text{pour tout } x \in F, \quad x \in E.$$

On note alors $F \subset E$. On dit aussi que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.
- On dit qu'un ensemble F n'est pas inclus dans E s'il existe un élément $x \in F$ tel que $x \notin E$:

$$\text{il existe } x \in F, \quad x \notin E.$$

On On note alors $F \not\subset E$.



Inclusion — Non inclusion

Exemple 1.7 Remplacer les ... par le symbole adéquat entre $\subset$ et $\not\subset$.

Inclusion ou pas	Inclusion ou pas
$\{0\} \subset \{0,1,2,3\}$	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\} \not\subset \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ impaire}\}$
$\{0,4\} \not\subset \{0,1,2,3\}$	$\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ cte}\} \subset \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ arith.}\}$
$[0,1] \subset \mathbb{R}$	$\{(a,-a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$
$[-1,1] \not\subset [2,3]$	$\{(a,1-a) \mid a \in \mathbb{R}\} \not\subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$
$[0,1] \not\subset [0,1[$	$\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M)=0\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}_3[x] \not\subset \mathbb{R}_2[x]$	$\{P^2 \mid P \in \mathbb{R}_1[x]\} \not\subset \mathbb{R}_1[x]$
$\mathbb{R}_1[x] \subset \mathbb{R}_2[x]$	$\{P^2 \mid P \in \mathbb{R}_1[x]\} \subset \mathbb{R}_2[x]$

Il ne faut pas confondre l'appartenance $\in$ (élément appartenant à un ensemble) et l'inclusion (ensemble inclus dans un autre ensemble).

$2 \in \{2,4,5\}$	$\cancel{2 \subset \{2,4,5\}}$
$\cancel{\{2\} \in \{2,4,5\}}$	$\{2\} \subset \{2,4,5\}$

Pour démontrer que F est inclus dans E, voici la rédaction habituelle.

Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $x \in E$. D'où $F \subset E$.

Exemple 1.8 Montrons que
$$F = \{3a+1 \mid a \in [0,1]\} \quad \subset \quad [1,4]$$

Espace ambiant *: l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

- Soit $x \in F$, c'est-à-dire

  il existe un paramètre $a \in [0,1]$ tel que $x = 3a+1$ (existence *paramètre*)

- Montrons que $x \in [1,4]$, c'est-à-dire montrons que

  $1 \leqslant x \leqslant 4$ (*condition* à vérifier)

  On a $0 \leqslant a \leqslant 1$

  Donc $0 \leqslant 3a \leqslant 3$

  Donc $1 \leqslant 3a+1 \leqslant 4$

  C-à-d $1 \leqslant x \leqslant 4$

Donc $x \in [1,4]$. D'où $F \subset [1,4]$.

Exemple 1.9 Montrons que
$$F = \{x \mapsto x^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \subset \quad E = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction paire }\}.$$

Espace ambiant *: l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

Soit $f \in F$, c'est-à-dire

il existe un paramètre $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^{2n}$ (existence *paramètre*)

Montrons que $f \in E$, c'est-à-dire montrons que

f est une fonction paire (*condition* à vérifier)

Tout d'abord, le domaine de définition de f, l'ensemble $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0. Puis, on a,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$$

Donc, f est paire, c'est-à-dire $f \in E$. D'où $F \subset E$.

Exemple 1.10 Montrons que
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y=0\} \quad \subset \quad E = \{(t,-t) | t \in \mathbb{R}\}$$

Espace ambiant *: l'ensemble de couples de nombres réels $\mathbb{R}^2$.*

Soit $(x,y) \in F$, c'est-à-dire

$x+y=0$ (*condition* vérifiée)

Montrons que $(x,y) \in E$, c'est-à-dire montrons que

il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (t,-t)$ (existence *paramètre*)

Brouillon. On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (t,-t)$. Comme $y + x = 0$, on peut remarquer que $(x,y) = (x,-x)$. Posons $t = x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,-x) && \text{car } x+y=0 \\ &= (t,-t) && \text{par choix de } t\end{aligned}$$

Donc $(x,y) \in E$. D'où $F \subset E$.

Exemple 1.11 Montrons que

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{est impaire } \} \quad \subset \quad E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(0) = 0\}$$

Espace ambiant *: l'ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$.

Soit $f \in F$, c'est-à-dire

$$f \text{ est impaire} \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

Montrons que $f \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$f(0) = 0 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

Comme f est impaire, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = -f(x).$$

En particulier, on obtient

$$f(0) = -f(0) \qquad \text{c-à-d} \qquad 2f(0) = 0 \qquad \text{c-à-d} \qquad f(0) = 0$$

Donc $f \in E$. D'où $F \subset E$.

? Pour démontrer que E n'est inclus dans F, voici la rédaction habituelle.

On cherche un élément $x \in E$ tel que $x \notin F$. Soit $x =$ .....
- *D'une part, $x \in E$ car *insérer raisonnement*.*
- *D'autre part, $x \notin F$ car *insérer raisonnement.**

Ainsi, on a exhibé un élément $x \in E$ tel que $x \notin F$. D'où $F \not\subset E$.

Exemple 1.12 Montrer que

$$E = [-1,1] \not\subset F = \{a^2 | \ a \in \mathbb{R}\}.$$

Espace ambiant *: l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.

On cherche une *nombre réel x*
- qui appartient à E (c'est-à-dire qui est compris entre -1 et 1)
- mais qui n'appartient pas à F (c'est-à-dire qui n'est pas le carré d'un nombre réel).

Soit $x = -1 \in \mathbb{R}$.
- D'une part, $x \in E$ (*condition* vérifiée)
- D'autre part, montrons que $x \notin F$. Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que x est dans F. Alors,

$$\text{il existe } a \in \mathbb{R}, \ -1 = a^2 \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

Alors, on aurait que $-1 = a^2 \leqslant 0$. C'est absurde. Donc $x \notin F$.

Ainsi, on a exhibé un élément $x \in E$ tel que $x \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

Exemple 1.13 Montrer que

$$E = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une fonction paire }\} \not\subset F = \{x \mapsto x^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

***Espace ambiant** : l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

On cherche une *fonction*

- qui appartient à E (c'est-à-dire qui est paire)
- mais qui n'appartient pas à F (c'est-à-dire qui n'est pas une fonction puissance d'exposant pair).

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + 1$$

- D'une part, la fonction f est paire, car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x) \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

  Donc $f \in E$.
- D'autre part, montrons que $f \notin F$. Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que f est dans F. Alors,

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^{2n} \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

  Alors, on aurait que $f(0) = 0 = 1$. C'est absurde. Donc $f \notin F$.

Ainsi, on a exhibé un élément $f \in E$ tel que $f \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

Exemple 1.14 Montrer que

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | u_0 = 0\} \not\subset F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} | (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique }\}$$

***Espace ambiant** : l'ensemble des suites réelles.*

On cherche une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- qui appartient à E (c'est-à-dire dont le premier terme est nul)
- mais qui n'appartient pas à F (c'est-à-dire qui n'est pas arithmétique).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = n^2$$

- D'une part, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ car $u_0 = 0$ (*condition* vérifiée)
- D'autre part, montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin F$. Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans F. Alors,

$$\text{il existe } r \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

  Alors, on aurait que $r = u_1 - u_0 = 1 = u_2 - u_1 = 3$. C'est absurde. Donc $x \notin F$.

Ainsi, on a exhibé un élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

Définition 1.15 — Principe de la double inclusion. Soient E et F deux ensembles.

$$E = F \quad \Longleftrightarrow \quad E \subset F \ \ \underline{\text{et}} \ \ F \subset E.$$

Pour prouver l'égalité de deux ensembles E et F, on utilise couramment le raisonnement par *double inclusion* en montrant successivement les deux inclusions :

- *$E \subset F$, c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $x \in F$.*
- *$F \subset E$, c'est-à-dire pour tout $x \in F$, $x \in E$.*

Exemple 1.16 Montrer que

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x+1\} = \{(a+1, 3a+4) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Espace ambiant *: l'ensemble de couples de nombres réels $\mathbb{R}^2$.* Notons A l'ensemble de gauche et B celui de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $A \subset B$.
  Soit $u = (x,y) \in A$, c'est-à-dire

$$y = 3x+1 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

  Montrons que $u = (x,y) \in B$, c'est-à-dire montrons que

$$\text{il existe un paramètre } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) = (a+1, 3a+4) \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

  Posons $a = x - 1 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} x &= a+1 \\ y &= 3x+1 = 3(a+1)+1 = 3a+4 \end{cases}$$

  Donc

$$u = (x,y) = (a+1, 3a+4)$$

  Donc $u \in B$. D'où $A \subset B$.

- Montrons que $B \subset A$.
  Soit $u = (x,y) \in B$, c'est-à-dire

$$\text{il existe un paramètre } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) = (a+1, 3a+4) \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

  Montrons que $u = (x,y) \in A$, c'est-à-dire montrons que

$$y = 3x+1 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

  On a

$$3x+1 = 3(a+1)+1 = 3a+4 = y$$

  Donc $u = (x,y) \in A$. D'où $B \subset A$.

? Pour prouver l'égalité de deux ensembles E et F, on peut aussi raisonner par *équivalence*.

On a

$$x \in E \iff (\dots) \iff x \in F$$

Donc $E = F$.

Exemple 1.17 Déterminer l'ensemble $S = \{x \in \mathbb{R} | \exp(x^2) - 2 = 0\}$.

***Espace ambiant** : l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned} x \in S &\iff \exp(x^2) - 2 = 0 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée}) \\ &\iff \exp(x^2) = 2 \\ &\iff x^2 = \ln(2) \\ &\iff x = \sqrt{\ln(2)} \text{ ou } x = -\sqrt{\ln(2)} \\ &\iff x \in \left\{\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)}\right\} \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{\sqrt{\ln(2)}, -\sqrt{\ln(2)}\right\}$.

1.3 L'ensemble des parties d'un ensemble

Définition 1.18 — **Ensemble des parties.** Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties de** E, notée $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles A qui sont inclus dans E. Autrement dit, on a

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Exemple 1.19

E	$\mathcal{P}(E)$
$\{\text{Alice}, \text{Bob}\}$	$\{\varnothing, \{\text{Alice}\}, \{\text{Bob}\}, \{\text{Alice}, \text{Bob}\}\}$
$\{0, 1\}$	$\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
$\{a, b, c\}$	$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

! Puisque $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$, on a $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$. Donc $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide, il contient toujours au moins $\varnothing$ et E.

2 Opération sur deux parties

2.1 Union et intersection

Définition 2.1 — Union de deux ensembles. Soient A et B deux parties de E. On appelle **union** de A et B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments appartenant <u>soit</u> à A, <u>soit</u> à B, c'est-à-dire

$$A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \ \underline{\text{ou}}\ x \in B\}.$$

Autrement dit, on a

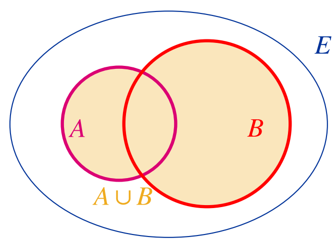
$$x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \ \ \underline{\text{ou}}\ \ x \in B.$$

Définition 2.2 — Intersection de deux ensembles. Soient A et B deux parties de E. On appelle **intersection** de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments appartenant à A <u>et</u> à B, c'est-à-dire

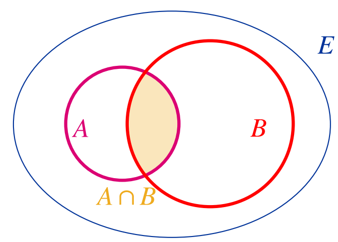
$$A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \ \underline{\text{et}}\ x \in B\}.$$

Autrement dit, on a

$$x \in A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \ \ \underline{\text{et}}\ \ x \in B.$$



Union



Intersection

<u>Exemple 2.3</u>

Exemples	Opération	Résultats
$\{\text{Alice}, \text{Bob}\} \cap \{\text{Bob}, \text{Pierre}, \text{Paul}\}$	Intersection	$\{\text{Bob}\}$
$\{\text{Alice}, \text{Bob}\} \cup \{\text{Bob}, \text{Pierre}, \text{Paul}\}$	Union	$\{\text{Alice}, \text{Bob}, \text{Pierre}, \text{Paul}\}$
$\{1,2,3\} \cap \{-3,7,9\}$	Intersection	$\varnothing$
$\{1,2,3\} \cup \{-3,7,9\}$	Union	$\{-3,1,2,3,7,9\}$
$]-\infty,3] \cup [2,4]$	Union	$]-\infty,4]$
$]-1,1[\cup [1,2]$	Union	$]-1,2]$
$]-1,1] \cap [0,1[$	Intersection	$[0,1[$
$]-1,0[\cap [0,1]$	Intersection	$\varnothing$
$\mathbb{Z} \cap [-\pi, \sqrt{2}]$	Intersection	$\{-3,-2,-1,0,1\} = [\![-3,1]\!]$

Proposition 2.4 — Opérations sur les unions et les intersections. Soient A, B et C des parties de E. On a les relations suivantes.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 2.5 Déterminer $F_1 \cap F_2$ où

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x - y + z = 1\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 2\}$$

***Espace ambiant** : l'ensemble des triplets $\mathbb{R}^3$*

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\iff (x,y,z) \in F_1 \ \underline{\text{et}} \ (x,y,z) \in F_2 \\
&\iff 3x - y + z = 1 \text{ (cond. vérifiée)} \ \underline{\text{et}} \ x - 2y + z = 2 \text{ (cond. vérifiée)} \\
&\iff \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On aboutit à un **système linéaire** que l'on résout par *pivot de Gauss*.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 5y - 2z = -5 & L_2 \to L_2 - 3L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Nbre d'inconnues > Nbre d'équations. On choisit deux inconnues principales, par exemple x et y, que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y = -1 + \frac{2}{5}z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = -1 + \frac{2}{5}z \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = \left(-\frac{1}{5}z, -1 + \frac{2}{5}z, z\right) \\
&\iff (x,y,z) \in \left\{\left(-\frac{1}{5}z, -1 + \frac{2}{5}z, z\right) | z \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \left\{\left(-\frac{1}{5}z, -1 + \frac{2}{5}z, z\right) | z \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 2.6 Déterminer $F_1 \cup F_2$ où

$$F_1 = \{1\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 1 = 0\}$$

***Espace ambiant** : l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

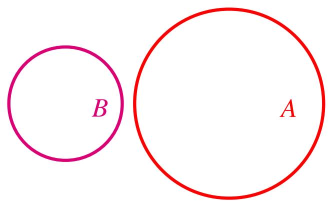
$$\begin{aligned}
x \in F_1 \cup F_2 &\iff x \in F_1 \ \underline{\text{ou}} \ x \in F_2 \\
&\iff x = 1 \ \underline{\text{ou}} \ 2x + 1 = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\
&\iff x = 1 \ \underline{\text{ou}} \ x = -\frac{1}{2} \\
&\iff x \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Donc

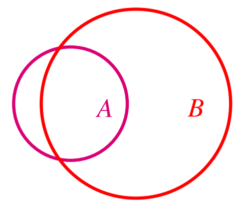
$$F_1 \cup F_2 = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$$

2.2 Ensembles disjoints

Définition 2.7 — Ensembles disjoints. Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$. Autrement dit, deux ensembles sont disjoints si et seulement s'ils n'ont aucun élément en commun.



Disjoints



Non disjoints

Exemple 2.8

A	B	Disjoints (Oui/Non)
$\{6, 12, 13\}$	$\{1, 2, 3\}$	Oui
$\{6, 12, 13\}$	$[\![1, 10]\!]$	Non car élément commun (6)
$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$	Non car élément commun (3)
$[0, 1]$	$[-1, 0[$	Oui
$]-\infty, -1]$	$\mathbb{N}$	Oui

2.3 Différence et complémentaire

Définition 2.9 — Différence de deux ensembles. Soient A et B deux parties de E. On appelle **différence** de A par B, notée $A \backslash B$, l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B, c'est-à-dire

$$A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Autrement dit, on a

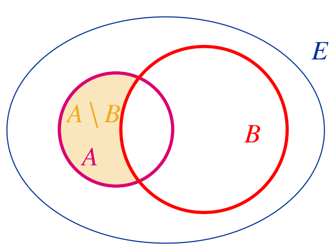
$$x \in A \backslash B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \ \underline{\text{et}} \ x \notin B.$$

Définition 2.10 — Complémentaire d'un ensemble. Soit A une partie de E. On appelle **complémentaire** de A dans E, notée $E \backslash A$ ou A^c ou $\overline{A}$, l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A, c'est-à-dire

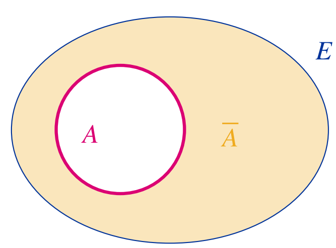
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Autrement dit, on a

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A.$$



Différence



Complémentaire

Exemple 2.11

Exemples	Opération	Résultats
$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	Différence	$\mathbb{R}^*$
$[0,2]\backslash[1,3]$	Différence	$[0,1[$
$\overline{[0,2]}$	Complémentaire	$]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$
$\mathbb{N}\backslash\{2p \mid p\in\mathbb{N}\}$	Différence	$\{2p+1 \mid p\in\mathbb{N}\}$

Proposition 2.12 — **Opérations avec le complémentaire.** Soient A, B et C des parties de E. On a les relations suivantes.

- $A\cup\overline{A}=E$
- $A\cap\overline{A}=\varnothing$
- $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$
- $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

Exemple 2.13 Soit $A=\{x\in\mathbb{R}|x^2-3x+2\neq 0\}$. Déterminer $\overline{A}$.

Espace ambiant *: l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned} x\in\overline{A} &\iff x\notin A \\ &\iff x^2-3x+2=0 \text{ (cond. contraire vérifiée)} \\ &\iff x=1 \ \text{ ou } \ x=2 \\ &\iff x\in\{1,2\} \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{A}=\{1,2\}$$

2.4 Produit cartésien

Définition 2.14 — **Produit cartésien de deux ensembles.** Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E par F, noté $E\times F$, est l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\in E$ et $y\in F$, c'est-à-dire

$$E\times F=\{(x,y) \mid x\in E \text{ et } y\in F\}.$$

Autrement dit, on a

$$(x,y)\in E\times F \iff x\in E \ \text{ et } \ y\in F.$$

Si $E=F$, le produit cartésien $E\times F$ se note E^2.

! Un couple d'éléments est constitué de deux éléments dans un certain ordre. On distingue donc le couple (a,b) (énumération ordonnée) de la paire $\{a,b\}$ (énumération non ordonnée). Ainsi, de manière générale $E\times F\neq F\times E$ car l'ordre importe dans un couple.

Exemple 2.15

E	F	Produit cartésien $A\times B$
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{(a,b)\}$
$\{a,b\}$	$\{c\}$	$\{(a,c),(b,c)\}$
$\{0,1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2=\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R}\}$

Définition 2.16 — Produit cartésien de plusieurs ensembles. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. Le **produit cartésien** de ces n ensembles, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que pour tout $i\{1, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$, c'est-à-dire

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) | \ x_1 \in E_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \dots = E_n$, le produit cartésien se note E^n.

Exemple 2.17 Considérons les trois ensembles suivants

$$A = \{1, 2\}, \qquad B = \{3, 4\}, \qquad C = \{6\}$$

Déterminons $A \times B \times C$.

On a

$$A \times B \times C = \{(1, 3, 6), (1, 4, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6)\}$$