XV. Probabilités sur un univers fini

1 Expériences aléatoires – Événements

1.1 Définition

Définition 1.1 — Expérience aléatoire – Univers. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Elle comporte plusieurs résultats possibles, appelés **issues**.
2. On ne peut pas prévoir l'issue avant d'avoir réalisé l'expérience.

L'ensemble des issues de l'expérience est appelé **l'univers**, il est noté généralement Ω.

! Lors de la description d'une expérience aléatoire, l'univers des possibles n'est pas toujours précisé. L'étude d'une expérience aléatoire commence donc souvent par la **description de l'ensemble des résultats possibles**, appelée modélisation.

Exemple 1.2

Expérience	Résultats possibles	Univers
On lance un dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.	$1,2,3,4,5,6$	$\Omega = [\![1,6]\!]$
On lance deux dés discernables, et on regarde le numéro de chaque dé, que l'on note sous la forme d'un couple.	$(1,1),(1,2),\ldots$	$\Omega = [\![1,6]\!]^2$
On considère une urne contenant a boules blanches et b boucles bleues. On tire au hasard une poignée de 4 boules et on note le nombre de boules blanches et le nombre de boules bleues.	$(k,4-k)$ avec $k \in [\![0,4]\!]$, nombre de boules blanches	$\Omega = \{(k,4-k),\ k \in [\![0,4]\!]\}$

Dans la suite de ce chapitre, Ω désignera l'univers d'une expérience aléatoire.
De plus, on supposera Ω **fini** et non vide. Il sera donc de la forme $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$.

Définition 1.3 — Èvènement. Un **évènement** est une partie de l'univers, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble Ω. L'ensemble des évènements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$. On peut distinguer certains évènements en particulier.

- Ω est **l'événement certain**.
- $\varnothing$ est **l'événement impossible**.
- Tout événement de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est une des issues de l'expérience, est appelé **événement élémentaire**.

Exemple 1.4 On lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. On rappelle que $\Omega = [\![1,6]\!]$.

Evènement	Ensemble	Type d'évènement
« on obtient 5 »	$\{5\}$	Évènement élémentaire
« on obtient 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 »	$\{1,2,3,4,5,6\}$	Évènement certain
« on obtient 7 »	$\varnothing$	Évènement impossible
« on obtient un nombre pair »	$\{2,4,6\}$	Évènement

Exemple 1.5 On considère une urne contenant 6 boules blanches et 15 boucles bleues et on note sous la forme d'un couple le nombre de boules blanches et le nombre de boules bleues. On en tire 11 boules parmi ces 21 boules. On considère l'évènement D :« On obtient 5 boules blanches ou 3 boules bleues » . Alors

$$D = \{(5,6),(8,3)\}.$$

1.2 Opérations sur les événements

Définition 1.6 Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω.

- ▷ L'événement « A **ou** B » est l'évènement qui a lieu lorsqu'au moins un des deux évènements A et B a lieu. Il s'agit de l'ensemble $A \cup B$.
- ▷ L'événement « A **et** B » est l'évènement qui a lieu lorsque les deux évènements A et B sont réalisés. Il s'agit de l'ensemble $A \cap B$.
- ▷ L'événement **contraire de** A est l'évènement qui a lieu exactement lorsque l'évènement A n'a pas lieu. Il s'agit de l'ensemble $\bar{A}$.

Exemple 1.7 On lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. On rappelle que $\Omega = [\![1,6]\!]$.

Évènement	Opération	Ensemble
A « on obtient un nombre impair »		$\{1,3,5\}$
B « on obtient 2 »		$\{2\}$
$A \cup B$	Union – « Ou »	$\{1,2,3,5\}$
$A \cap B$	Intersection – « Et »	$\varnothing$
$\overline{A}$	Contraire – « Non »	$\{2,4,6\}$

Définition 1.8 Deux événements A et B sont dits incompatible si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 1.9 Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire une boule au hasard. Donner deux évènements incompatibles.

Considérons les deux évènements A « On tire une boule blanche » et B « On tire une boule avec un numéro 3 ». Alors les deux évènements A et B sont incompatibles.

Définition 1.10 Soit $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ une famille d'événements d'une expérience aléatoire. Alors

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$ est l'événement « Au moins un des A_k, pour $1 \leqslant k \leqslant r$, est réalisé »
- $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r$ est l'événement « Tous les A_k, pour $1 \leqslant k \leqslant r$, sont réalisés »

1.3 Système complet d'événements

Définition 1.11 — Système complet. On appelle **système complet d'évènements** (ou **partition** de l'univers) un ensemble d'évènements qui sont deux à deux disjoints et dont la réunion forme l'univers. Autrement dit, si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements, alors $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un **système complet d'événements** lorsque :

1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \varnothing$,
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

? Un système complet d'évènements est donc une façon de ranger/découper tout l'univers, sans faire de double compte.

Exemple 1.12 On lance (encore) un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les familles suivantes forment-elles un système complet d'évènements ?

1. La famille $(A_1, A_2, \ldots, A_6)$ où, pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, A_i « On obtient le numéro i » ? OUI
2. La famille (A, B) où A « On obtient un nombre pair » et B « On obtient un nombre impair » ? OUI
3. La famille (A, A_1, A_3, A_5) ? OUI
4. La famille (A, A_1, A_3) ? NON (la réunion ne forme pas l'univers)
5. La famille (B, A_1, A_2, A_4, A_6) ? NON (les évènements ne sont pas deux à deux disjoints)

Exemple 1.13 Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire une boule au hasard. Les familles suivantes forment-elles un sytème complet d'évènements ?

1. La famille (A_1, A_2, A_3) où, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, A_i « On obtient une boule numérotée i » ? OUI
2. La famille (N, B) où N « On obtient une boule noire » et B « On obtient une boule blanche » ? OUI
3. La famille (C, D) où C « On obtient la boule noire numéro 1 » et D « On n'obtient pas la boule noire numéro 1 » ? OUI

Proposition 1.14 Soit A un événement. Alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

1.4 Résumé sur le vocabulaire

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités	Exemple avec le dé
L'ensemble	L'univers	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Un élément	Une issue	1, 2, 3, 4, 5, 6
Un singleton	Un évènement élémentaire	$\{3\}$ // « On obtient 3 »
Une partie	Un évènement	$\{1, 3, 5\}$ // « On obtient un nombre impair »
L'ensemble vide	L'évènement impossible	$\varnothing$ // « On obtient le nombre 7 »

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
Le complémentaire	L'évènement contraire
$A \cap B$	« A et B »
$A \cup B$	« A ou B »
$A \cap B = \varnothing$	« A et B incompatibles »

2 Probabilité sur un ensemble fini

2.1 Notion de probabilité – Espace probabilisé fini

On rappelle que Ω est un ensemble **fini** et non vide. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω.

Définition 2.1 On appelle **probabilité sur** Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

1. Pour tout évènement A, $P(A) \in [0,1]$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour tout couple (A,B) d'événements incompatibles, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pour tout événement A, le réel $P(A)$ est appelé **probabilité de** A.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est alors appelé **espace probabilisé fini.** Pour la suite du chapitre, on suppose qu'une probabilité P est donnée sur Ω.

Exemple 2.2 On considère une expérience aléatoire consistant à tirer au hasard quelque chose d'un sac contenant une carotte et un radis.

- Dans cette expérience, l'univers est donné par

$$\Omega = \{\text{carotte}, \ \text{radis}\}.$$

- Dans cette expérience, l'ensemble des évènements est donné par

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{\text{carotte}\}, \{\text{radis}\}, \{\text{carotte, radis}\}\}.$$

  Autrement dit, quatre évènements sont possibles :

Évènement	Ensemble
« On ne tire rien » (évènement impossible),	$\varnothing$
« On tire une carotte » (évènement élémentaire)	$\{\text{carotte}\}$
« On tire un radis » (évènement élémentaire)	$\{\text{radis}\}$
« On tire une carotte ou un radis » (évènement certain)	$\{\text{carotte, radis}\}$

- On considère l'application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\{\text{carotte}\}) = \frac{4}{5}, \quad P(\{\text{radis}\}) = \frac{1}{5}.$$

  Justifier que cette application est une probabilité.
  - Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $P(A) \in [0,1]$.
  - On a bien $P(\Omega) = 1$.
  - Par exemple, pour les deux évènements incompatibles $A = \{\text{carotte}\}$ et $B = \{\text{radis}\}$, on a,

$$P(A \cup B) = P(\ \Omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad P(A) + P(B) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1.$$

  Et pareil pour les autres évènements incompatibles.

2.2 Propriétés élémentaires

Dans toute cette section, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé fini.

Proposition 2.3 Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements.

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
4. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Démonstration.

1. Les évènements Ω et $\varnothing$ sont incompatibles, donc d'après la définition de P :

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing).$$

   Donc, $P(\varnothing) = 0$.

2. Les évènements A et $\bar{A}$ sont incompatibles, donc d'après la définition de P :

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

   Donc, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

4. On a $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ et ces deux évènements sont incompatibles. Donc

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B).$$

■

Proposition 2.4 — Formule du crible ou Formule de Poincaré. Pour tous évènements A et B, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

! On peut généraliser cette formule. Pour tous évènements A, B et C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Proposition 2.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour toute famille finie $(A_1, \cdots, A_n)$ d'événements **deux à deux incompatibles** c'est-à-dire que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$), on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Proposition 2.6 Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1.$$

Exemple 2.7 Soit P une probabilité sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Supposons que :

ω	1	2	3	4
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	

Calculer $P(\{4\})$.

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = 1 \text{ donc } P(\{4\}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Proposition 2.8 — Formule des probabilités totales. Si $(A_i)_{1 \geqslant i \geqslant m}$ est un système complet d'évènements, alors pour tout évènement B, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B).$$

2.3 Exemple fondamental : la probabilité uniforme

On cherche à construire une probabilité pertinente dans le cas d'une situation d'équiprobabilité, c'est-à-dire lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. On rencontre ce genre de situation lors de lancers d'une pièce ou d'un dé (non truqués), de tirages d'une carte dans un jeu,...

Proposition 2.9 — Probabilité uniforme. L'application

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelée **probabilité uniforme sur** Ω.

! La formule revient à dire que

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas}}.$$

Exemple 2.10 On lance un dé à 6 faces équilibré, et on regarde la valeur obtenue sur la face supérieure. L'univers des possibles associé à cette expérience est $\Omega = [\![1,6]\!]$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

Évènement	Ensemble	Probabilité
« On obtient 1 »	$\{1\}$	$P(\{1\}) = \frac{1}{6}$
« On obtient 7 »	$\varnothing$	$P(\varnothing) = 0$
« On obtient 3 »	$\{3\}$	$P(\{3\}) = \frac{1}{6}$
« On obtient un nombre pair »	$\{2,4,6\}$	$P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
« On obtient un nombre impair plus petit que 4 »	$\{1,3\}$	$P(\{1,3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Exemple 2.11 On considère un jeu de 32 cartes (pour chaque couleur : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). On tire une carte au hasard. On souhaite calculer la probabilité de l'évènement B : « On tire une petite carte (7, 8, 9, 10) ».

L'univers ici est

$$\Omega = \{7\clubsuit, 8\clubsuit, \ldots, \mathrm{As}\clubsuit, 7\heartsuit, \ldots\}.$$

On munit l'univers de la probabilité uniforme. Réaliser l'évènement B correspond à tirer un 7, ou un 8, ou un 9, ou un 10 parmi une des quatre couleurs. Pour l'écrire précisément, on va utiliser la famille (A_1, A_2, A_3, A_4) qui constitue un système complet d'évènements avec,

$$\begin{array}{lll} A_1 \text{ « On tire un coeur »} & \text{i.e.} & A_1 = \{7\heartsuit, 8\heartsuit, \ldots, \mathrm{As}\heartsuit\} \\ A_2 \text{ « On tire un trèfle »} & \text{i.e.} & A_2 = \{7\clubsuit, 8\clubsuit, \ldots, \mathrm{As}\clubsuit\} \\ A_3 \text{ « On tire un carreau »} & \text{i.e.} & A_3 = \{7\diamondsuit, 8\diamondsuit, \ldots, \mathrm{As}\diamondsuit\} \\ A_4 \text{ « On tire un pique »} & \text{i.e.} & A_4 = \{7\spadesuit, 8\spadesuit, \ldots, \mathrm{As}\spadesuit\} \end{array}$$

D'après la formule de probabilité totale, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B \cap A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4).$$

Or,

$$P(B \cap A_1) = \frac{\mathrm{card}(\{7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit\})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

De même pour les autres. Donc, on obtient,

$$P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.12 On tire au hasard un ensemble de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité de l'évènement suivant

B : « la main contient au moins un As ».

L'univers est ici,

$$\Omega = \{(7\clubsuit, 8\clubsuit, \mathrm{As}\clubsuit, 7\heartsuit, 10\diamondsuit), \ldots\}.$$

Il est trop compliqué à décrire... Mais on sait au moins que

$$\mathrm{card}(\Omega) = \binom{32}{5}.$$

On munit cet espace de la probabilité uniforme car les tirages sont équiprobables. Il est plus facile de calculer la probabilité de l'évènement contraire de B, c'est-à-dire

$\bar{B}$: « la main de contient aucun as ».

En effet, on a

$$P(\bar{B}) = \frac{\mathrm{card}(\bar{B})}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

Donc,

$$P(B) = 1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

Exemple 2.13 On réalise trois tirages avec remise dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules jaunes. Déterminer la probabilités de l'évènement suivant

A : « tirer une boule rouge puis une jaune puis une jaune »

Numérotons les boules rouges 1 à 4 et les jaunes 5 à 10. Ici l'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.Il y a ici équiprobabilité donc on le munit de la probabilité uniforme. Plutôt que de décrire Ω, on calcule son cardinal :

$$\mathrm{card}(\Omega) = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000.$$

Finalement, on obtient que

$$P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{4 \times 6 \times 6}{1000} = 0,144.$$

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition

Proposition 3.1 Soit B un événement non négligeable. L'application

$$\begin{array}{rccl} P_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}$$

est une probabilité sur Ω, appelé **probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé**.

Exemple 3.2 On lance deux dés (numérotés de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit 6, **sachant que** le premier dé a donné un chiffre pair ?

Pour formaliser la situation, un résultat d'un lancer de dé est représenté par un couple (a, b) où a est le résultat du premier dé et b celui du deuxième. Ainsi,

$$\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] = [\![1,6]\!]^2.$$

et en particulier,

$$\text{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36.$$

On découpe ce que l'on cherche en deux évènements

B : « La somme des chiffres obtenue est 6 »

A : « Le premier dé donne un chiffre pair »

Avec ces notations, on cherche à déterminer

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Or,

$$P(A) = \frac{3 \times 6}{6 \times 6} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(A \cap B) = P(\{(2,4),(4,2)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Finalement,

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{9}.$$

Exemple 3.3 On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules blanches et des boules noires :

- ▷ U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires $(B_{1,1}, B_{1,2}, N_{1,1}, N_{1,2}, N_{1,3})$
- ▷ U_2 contient 1 boule blanche et 4 boules noires. $(B_{2,1}, N_{2,1}, N_{2,2}, N_{2,3}, N_{2,4})$

On choisit une urne au hasard, puis on tire successivement deux boules, sans remise, dans l'urne choisie. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule noire **sachant** que l'urne choisie est U_1 ?

Si on veut essayer de formaliser cela, on commence par décrire l'univers de l'expérience. Plutôt que décrire Ω en entier, on peut au moins donner son cardinal

$$\text{card}\,\Omega = 2 \times 5 \times 4 = 40$$

On découpe ce que l'on cherche en deux évènements

B : « On tire une boule blanche et une boule Noire »

U_1 : « On a choisi l'Urne 1 »

Avec ces notations, on cherche à déterminer

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Comme le choix des urnes est équiprobable, on a

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Puis, l'évènement $A \cap B$ correspond au fait de tirer une boule blanche et une boule noire dans la première urne. Si on décrit toutes les issues favorables, on a

$$\text{card}(A \cap B) = 2 \times 3 + 3 \times 2 = 12.$$

Donc

$$P(A \cap B) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

Finalement,

$$P_A(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{5}.$$

3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 3.4 — Formule des probabilités composées.

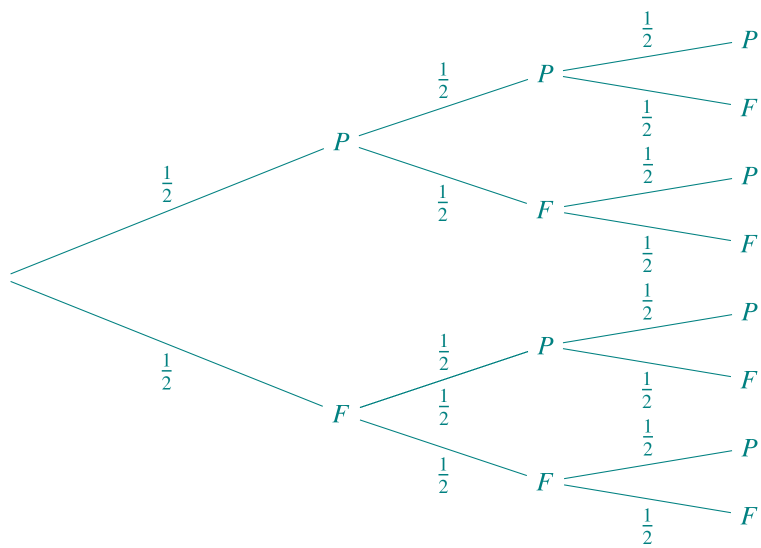
1. Si A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
2. Soient $A_1, \ldots A_p$ des évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}) \neq 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_1)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p).$$

! Autrement dit, sur un arbre de probabilité, la probabilité qu'un chemin se réalise est le produit des probabilités de toutes les branches qui le composent.

Exemple 3.5 On lance trois fois une pièce non truquée. Quelle est la probabilité de faire trois fois pile ?

Regardons d'abord ce qu'il se passe avec un arbre.



Avec l'arbre, on voit rapidement que la probabilité de faire trois fois pile est la suivante :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Pour formaliser cela, on peut introduire les évènements suivants :

$$\forall i \in [\![1,3]\!], \quad P_i : \text{« On obtient Pile au } i\text{-ième lancer »}$$

Avec ces notations, on cherche $P(P_1 \cap P_2 \cap P_3)$. En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient

$$P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = P(P_1) \times P_{P_1}(P_2) \times P_{P_1 \cap P_2}(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Exemple 3.6 Dans son tiroir, Agathe a 20 paires de chaussettes : 12 paires à pois et 8 paires rayées. Trois jours consécutifs, elle choisit au hasard dans son tiroir une paire de chaussettes. Si la paire est à pois, elle la met et si la paire est rayée, elle la met et le remplace dans le tiroir par une paire de chaussettes à pois. Quelle est la probabilité qu'Agathe porte des chaussettes rayées pendant les trois jours consécutifs ?

Pour formaliser cela, on peut introduire les évènements suivants :

$$\forall k \in [\![1,3]\!], \quad A_k : \text{« Agathe porte des chaussettes rayées le jour } k \text{ »}$$

On cherche alors $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. D'après la formule des probabilités composées, on obtient

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{8}{20} \times \frac{7}{13+7} \times \frac{6}{14+6} = \frac{21}{500}.$$

3.3 Formule des probabilités totales

Proposition 3.7 — Formule des probabilités totales. Soient B un évènement et $A_1, \ldots, A_n$ un **système complet d'événements**, avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(A_k) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B).$$

Autrement dit, sur un arbre de probabilité, la probabilité qu'un évènement se réalise est la somme des chemins qui le réalisent.

Exemple 3.8 Un groupe d'amis souhaite passer la soirée dans l'une des trois discothèques valables de Biarritz. Dans la discothèque *Pipeline*, l'animateur passe 25% de reggae, dans la discothèque *Mundaka*, l'animateur en passe 40% et dans la discothèque *JBay*, il en passe 30%. Les amis choisissent une discothèque au hasard. Quelle est la probabilité qu'en y entrant, un titre de reggae soit diffusé ?

On considère les évènements suivants :

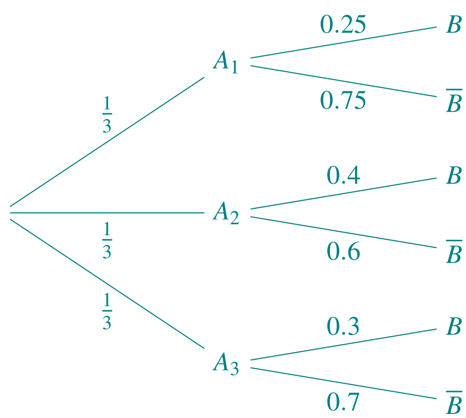
A_1 : « Les amis sortent au *Pipeline* »

A_2 : « Les amis sortent au *Mundaka* »

A_3 : « Les amis sortent au *JBay* »

B : « Un titre de reggae est diffusé »

La situation peut être résumée par l'arbre suivant.



On cherche $P(B)$. Comme (A_1, A_2, A_3) est un système complet d'évènements dont chacun des évènements est non négligeable, en utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{40}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{30}{100} \\ &= \frac{19}{60} \end{aligned}$$

3.4 Formule de Bayes

Proposition 3.9 — Formule de Bayes. Si A et B sont des évènements de probabilités non nulles, alors

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

La formule de Bayes sert à "remonter le temps". En effet, elle permet de calculer la probabilité de A sachant B, avec A qui a lieu avant B... Autrement dit, on cherche la probabilité d'une cause possible, connaissant le résultat.

Exemple 3.10 Retournons à Biarritz. Calculons la probabilité pour que le groupe d'amis ait choisi la discothèque *Mundaka* sachant qu'en entrant un titre de reggae est diffusé.

Il s'agit de calculer $P_B(A_2)$. Par formule de Bayes, on a

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2)P_{A_2}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{40}{100}}{\frac{19}{60}} = \frac{8}{19}.$$

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

On cherche à formaliser le fait que des paramètres peuvent avoir une influence entre eux (ou pas).

- Par exemple, si on joue deux fois à pile ou face, on a une chance sur deux de faire face au deuxième lancer, indépendamment du résultat du premier lancer. Ce qui se passe au deuxième lancer ne dépend pas du premier. En terme de probabilité, cette situation d'indépendance se traduit de la manière suivante :

$$P_{P_1}(F_2) = P_{F_1}(F_2) = P(F_2) = \frac{1}{2}.$$

- Prenons un second exemple. Dans une population, la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52. Par ailleurs, 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche. On comprend directement que cette anomalie dépend du sexe. Pour formaliser cela avec les probabilités, on peut introduire les évènements suivants :

F : « Naissance d'une fille »

G : « Naissance d'un garçon »

L : « Avoir une luxation de la hanche »

Alors, d'après l'énoncé, on a

$$P_F(L) = 0.02 \qquad \text{et} \qquad P_G(L) = 0.01.$$

De plus, en utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$P(L) = P(F)P_F(L) + P(G)P_G(L) = \frac{48}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{52}{100} \times \frac{1}{100} = 0,0148.$$

Cette situation de dépendance se traduit donc de la manière suivante :

$$P_F(L) \neq P_G(L) \neq P(L).$$

Définition 4.1 Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

autrement dit, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ lorsque

$$P_B(A) = P(A),$$

ou de manière équivalente lorsque

$$P_A(B) = P(B).$$

Exemple 4.2 On fait tourner deux fois une roue avec une zone rouge et une zone bleue de même surface. Si on tombe sur deux couleurs différentes, on gagne 1 euro, et sinon on perd 1 euro. On note R_1 :« on tombe sur rouge au premier tour » et G :« On gagne 1 euro ». Les événements R_1 et G sont-ils indépendants ?

D'une part, par équiprobabilité,

$$P_{R_1}(G) = P(\overline{R}_1) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part, en utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$P(G) = P(R_1)P_{R_1}(G) + P(\overline{R}_1)P_{\overline{R}_1}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc les deux évènements sont indépendants.

4.2 Indépendance mutuelle

Définition 4.3 Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements.
Les événements A_i sont dits **mutuellement indépendants** lorsque, pour toute partie I de $[\![1,n]\!]$:

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

En particulier, les évènements sont deux à deux indépendants.

! Par exemple, A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si et seulement si :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_2) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Exemple 4.4 On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois une pièce de monnaie et on note, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, F_k : Le k-ième lancer amène un Face. Alors les événements F_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont mutuellement indépendants, dans la mesure où les lancers sont eux-mêmes indépendants les uns des autres.

Proposition 4.5 Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements. Si $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors, si on pose, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$, les événements $B_1, \cdots, B_n$ sont mutuellement indépendants.