

## TD 10 – NOTION D’ENSEMBLE (CORRECTION)

**Exercice 1 – Appartenance ou non-appartenance.** Dans les phrases suivantes, remplacer les \_\_\_\_\_ par le symbole correspondant entre  $\in$  et  $\notin$ .

- En *italique*, les raisonnements par l’absurde.
- Cases remplies en bleu : ensembles définis de manière paramétrique (via l’existence d’un paramètre))
- Cases non remplies : ensembles définis de manière conditionnelle (via une condition)

$1 \in \{a^2   a \in \mathbb{R}\}$	car il existe
$-2 \notin \{a^2   a \in \mathbb{R}\}$	car (par l’absurde) s’il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $-2 = a^2$
$(1,2) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2   x+y=1\}$	car $x+y=1$
$(-1,-1) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2   y = \frac{1}{x}\}$	car $y = \frac{1}{x}$
$(0,2) \in \{(t,2+t)   t \in \mathbb{R}\}$	car il existe $t = 0$
$(0,2,3) \notin \{(a,a+b,0)   a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	car (par l’absurde) s’il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(0,2,3) = (a,a+b,0)$
$(1,5,-1) \in \{(a,a+b,-a)   a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	car il existe $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b = 4$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}.$	car le déterminant est positif
$f : x \mapsto \exp(x) \notin \mathbb{R}[x]$	car (par l’absurde) si $f \in \mathbb{R}[x]$
$x \mapsto x^3 + 1 \notin \mathbb{R}_2[x]$	car $\deg(x^3 + 1) = 3 > 2$
$x \mapsto 2x^5 + x \in \mathbb{R}_5[x]$	car $\deg(2x^5 + x) = 5 \leq 5$
$x \mapsto x^2 + 1 \in \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ paire}\}$	car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1$
$x \mapsto x^2 + 2x + 1 \in \{f^2 \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$	car il existe $f : x \mapsto x + 1$
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$	car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
$(2n+1)_{n \in \mathbb{N}} \in \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2\}$	car, $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+1)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \{A^{-1} \mid A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est inversible}\}.$	car il existe $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ inversible

**Exercice 2 – Inclusion.**

- Montrons que

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 1\} \subset E = \{(t, 1 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des couples de nombres réels.*)

Soit  $(x, y) \in F$ , c’est-à-dire vérifiant

$$2x + y = 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $(x, y) \in E$ , c’est-à-dire montrons que

$$\text{il existe un paramètre } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = (t, 1 - 2t) \quad (\text{existence paramètre})$$

Posons  $t = x \in \mathbb{R}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 1 - 2x) && \text{car } 2x + y = 1 \\ &= (t, 1 - 2t) && \text{car } t = x \end{aligned}$$

Donc  $(x, y) \in E$ . D’où  $F \subset E$ .

- Montrons que

$$F = \{(1+a, b-1, -a-b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \subset E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des triplets de nombres réels.*)

Soit  $(x, y, z) \in F$ , c’est-à-dire

$$\text{il existe 2 paramètres } a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) = (1+a, b-1, -a-b) \quad (\text{existence param.})$$

Montrons que  $(x, y, z) \in E$ , c’est-à-dire montrons que

$$x + y + z = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a,

$$x + y + z = (1+a) + (b-1) + (-a-b) = 0$$

Donc  $(x, y, z) \in E$ . D’où  $F \subset E$ .

- Montrons que

$$F = \{f : x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\} \subset E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des fonctions.*)

Soit  $f \in F$ , c’est-à-dire

$$\text{il existe 2 paramètres } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \quad (\text{existence param.})$$

Montrons que  $f \in E$ , c’est-à-dire montrons que

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad f(x_0) = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Posons  $x_0 = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$  (bien défini car  $a \neq 0$ !). Alors

$$f(x_0) = a \left( -\frac{b}{a} \right) + b = 0$$

Donc  $f \in E$ . D’où  $F \subset E$ .

- Montrons que

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, -c \leq nu_n \leq c\} \subset E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$$

(Espace ambiant : l’ensemble des suites)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ , c’est-à-dire

$$\exists c > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -c \leq nu_n \leq c \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ , c’est-à-dire montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -c \leq nu_n \leq c$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{c}{n} \leq u_n \leq \frac{c}{n}$$

Or les deux suites  $\left(-\frac{c}{n}\right)$  et  $\left(\frac{c}{n}\right)$  convergent vers 0. Donc, par **théorème d’encadrement**, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . D’où  $F \subset E$ .

- Montrons que

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 4x - 1\} \subset [0, +\infty[$$

(Espace ambiant : l’ensemble des nombres réels)

Soit  $x \in F$ , c’est-à-dire

$$x^4 = 4x - 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $x \in [0, +\infty[$ , c’est-à-dire montrons que

$$x \geq 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$x^4 = 4x - 1$$

Donc

$$x = \frac{x^4 + 1}{4} \geq 0$$

Donc  $x \in [0, +\infty[$ . D’où  $F \subset [0, +\infty[$ .

- Montrons que

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 2\} \subset E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}$$

(Espace ambiant : l’ensemble des couples de nombres réels)

Soit  $(x, y) \in F$ , c’est-à-dire

$$x - y = 2 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $x \in E$ , c’est-à-dire montrons que

$$(3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Comme  $x - y = 2$ , on a  $y = x - 2$  et donc

$$3x + y + 2 = 3x + x - 2 + 2 = 4x$$

De même,

$$x + 2y + 4 = x + 2(x - 2) + 4 = 3x$$

Finalement,

$$(3x + y + 2)(x + 2y + 4) = 12x^2 \geq 0$$

Donc  $(x, y) \in E$ . D’où  $F \subset E$ .

**Exercice 3 – Non-Inclusion.**

- Montrons que

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \subsetneq F = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des couples de nombres réels.*)

On cherche un couple  $(x, y)$  qui appartient à  $E$  mais qui n’appartient pas à  $F$

Soit  $(x, y) = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ .

- D’une part,  $(x, y) \in E$  car  $1 + (-1) = 0$  (*condition vérifiée*)
- D’autre part, montrons que  $(x, y) \notin F$ . Pour cela, on raisonne *par l’absurde*. Supposons par l’absurde que  $(x, y)$  est dans  $F$ . Alors,

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R}, (1, -1) = (t, t^2) \quad (\text{existence paramètre})$$

Alors  $t^2 = -1 \leq 0$ . C’est absurde. Donc  $(x, y) \notin F$ .

Ainsi, on a exhibé un élément  $(x, y) \in E$  tel que  $(x, y) \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

- Montrons que

$$E = \{(a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subsetneq F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des triplets de nombres réels.*)

On cherche un triplet  $(x, y, z)$  qui appartient à  $E$  mais qui n’appartient pas à  $F$

Soit  $(x, y, z) = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ .

- D’une part,  $(x, y, z) \in E$  car il existe  $a = 1 \in \mathbb{R}$  tel que  $(1, -1, 1) = (a, -a, a)$  (*existence paramètre*)
- D’autre part,  $(x, y, z) \notin F$  car  $1 + (-1) + 1 \neq 0$  (*condition non vérifiée*)

Ainsi, on a exhibé un élément  $(x, y, z) \in E$  tel que  $(x, y, z) \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

- Montrons que

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_0 = 0\} \subsetneq F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des suites.*)

On cherche une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui appartient à  $E$  mais qui n’appartient pas à  $F$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n$ .

- D’une part,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  car  $u_0 = 0$  (*condition vérifiée*)
- D’autre part,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \neq 0$  (*condition non vérifiée*)

Ainsi, on a exhibé un élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  tel que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

- Montrons que

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique}\} \subsetneq F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$$

(*Espace ambiant : l’ensemble des couples de nombres réels.*)

On cherche une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui appartient à  $E$  mais qui n’appartient pas à  $F$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n$ .

- D’une part,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  car la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n$$

(*condition vérifiée*)

- D’autre part,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \neq 0$  (car  $2 > 1$ ) (*condition non vérifiée*)

Ainsi, on a exhibé un élément  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  tel que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

- Montrons que

$$E = \{A \in_2 (\mathbb{R}) \mid A^2 = 0_{2,2}\} \subsetneq F = \{A \in_2 (\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$$

Espace ambiant : l’ensemble des matrices (de taille  $2 \times 2$ ). On cherche une matrice  $A \in_2 (\mathbb{R})$  qui appartient à  $E$  mais qui n’appartient pas à  $F$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D’une part,  $A \in E$  car

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,2}$$

(condition vérifiée)

- D’autre part,  $A \notin F$  car  $A$  n’est pas inversible car c’est une matrice  $2 \times 2$  et son déterminant vaut 0.

Ainsi, on a exhibé un élément  $A \in E$  tel que  $A \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

- Montrons que

$$E = \{A^2 \mid A \in_2 (\mathbb{R})\} \subsetneq F = \{A \in_2 (\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$$

(Espace ambiant : l’ensemble des matrices (de taille  $2 \times 2$ ))

On cherche une matrice  $M \in_2 (\mathbb{R})$  qui appartient à  $E$  mais qui n’appartient pas à  $F$

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- D’une part,  $M \in E$  car

$$\text{il existe } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in_2 (\mathbb{R}) \text{ tq } M = A^2$$

(existence paramètre)

- D’autre part,  $M \notin F$  car  $M$  n’est pas inversible car c’est une matrice  $2 \times 2$  et son déterminant vaut 0.

Ainsi, on a exhibé un élément  $M \in E$  tel que  $M \notin F$ . Donc  $E \not\subseteq F$ .

**Exercice 4 – Doucle inclusion.** Démontrer l’égalité  $A = B$  par double inclusion lorsque

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$  et  $B = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
2.  $A = \{(a - b, b, -2a + 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$
3.  $A = [a, b]$  et  $B = \{ta + (1 - t)b \mid t \in \mathbb{R}\}$  (pour  $a, b$  deux réels)
4.  $A = [0, 1]$  et  $B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq x\}$

1. Montrons que

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

*Espace ambiant* : l’ensemble de couples de nombres réels  $\mathbb{R}^2$ . Notons  $A$  l’ensemble de gauche et  $B$  l’ensemble de droite. Montrons l’égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que  $A \subset B$ .

Soit  $u = (x, y) \in A$ , c’est-à-dire

$$4x - y = 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $u = (x, y) \in B$ , c’est-à-dire montrons que

il existe un paramètre  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$  (existence *paramètre*)

Posons  $t = x - 1 \in \mathbb{R}$  (et donc  $x = t + 1$ ). On a

$$\begin{aligned} (x, y) &= (t + 1, y) && \text{car } t = x - 1 \\ &= (t + 1, 4x - 1) && \text{car } 4x - y = 1 \\ &= (t + 1, 4(t + 1) - 1) && \text{car } t = x - 1 \\ &= (t + 1, 4t + 3) \end{aligned}$$

Donc  $u \in B$ . D’où  $A \subset B$ .

- Montrons que  $B \subset A$ .

Soit  $u = (x, y) \in B$ , c’est-à-dire

il existe un paramètre  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$  (existence *paramètre*)

Montrons que  $u = (x, y) \in A$ , c’est-à-dire montrons que

$$4x - y = 1 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$4x - y = 4(t + 1) - (4t + 3) = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

Donc  $u = (x, y) \in A$ . D’où  $B \subset A$ .

- Comme  $A \subset B$  et  $B \subset A$ , par *principe de double inclusion*, on a montré que  $A = B$ .

2. Montrons que

$$\{(a-b, b, -2a+3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0\}$$

**Espace ambiant** : l’ensemble de triplets de nombres réels  $\mathbb{R}^3$ . Notons  $A$  l’ensemble de gauche et  $B$  l’ensemble de droite. Montrons l’égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que  $A \subset B$ .

Soit  $u = (x, y, z) \in A$ , c’est-à-dire

il existe deux paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $(x, y, z) = (a-b, b, -2a+3b)$  (existence paramètre)

Montrons que  $u = (x, y, z) \in B$ , c’est-à-dire montrons que

$$2x-y+z=0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$2x-y+z = 2(a-b) - b + (-2a+3b) = 2a - 2b - b - 2a + 3b = 0$$

Donc  $u = (x, y, z) \in B$ . D’où  $A \subset B$ .

- Montrons que  $B \subset A$ .

Soit  $u = (x, y, z) \in B$ , c’est-à-dire

$$2x-y+z=0 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $u = (x, y, z) \in A$ , c’est-à-dire montrons que

il existe deux paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $(x, y, z) = (a-b, b, -2a+3b)$  (existence paramètre)

Posons  $a = x+y \in \mathbb{R}$  et  $b = y \in \mathbb{R}$  (et donc  $a-b = x$ ) On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a-b, b, z) && \text{par choix de } a \text{ et } b \\ &= (a-b, b, -2x+y) && \text{car } 2x-y+z=0 \\ &= (a-b, b, -2(a-b)+b) \\ &= (a-b, b, -2a+3b) \end{aligned}$$

Donc  $u = (x, y, z) \in A$ . D’où  $B \subset A$ .

- Comme  $A \subset B$  et  $B \subset A$ , par *principe de double inclusion*, on a montré que  $A = B$ .

3. Soient  $a < b$ . Montrons que

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

**Espace ambiant** : l’ensemble de nombres réels  $\mathbb{R}$ . Notons  $B$  l’ensemble de droite. Montrons l’égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que  $[a, b] \subset B$ .  
Soit  $x \in [a, b]$ , c’est-à-dire

$$a \leq x \leq b \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $x \in B$ , c’est-à-dire montrons que

il existe un paramètre  $t \in [0, 1]$  tel que  $x = ta + (1 - t)b$  (existence paramètre)

Posons  $t = \frac{x-b}{a-b}$ . Tout d’abord,  $t \in [0, 1]$  car

$$\begin{aligned} & a \leq x \leq b \\ \text{donc } & a - b \leq x - b \leq 0 \\ \text{donc } & 1 \geq \frac{x-b}{a-b} \geq 0 & \text{car } a - b < 0 \\ \text{donc } & 1 \geq t \geq 0 \end{aligned}$$

De plus,

$$ta + (1 - t)b = \frac{x-b}{a-b} \times a + \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right)b = x$$

Donc  $x \in B$ . D’où  $[a, b] \subset B$ .

- Montrons que  $B \subset [a, b]$ .

Soit  $x \in B$ , c’est-à-dire

il existe un paramètre  $t \in [0, 1]$  tel que  $x = ta + (1 - t)b$  (existence paramètre)

Montrons que  $x \in [a, b]$ , c’est-à-dire montrons que

$$a \leq x \leq b \quad (\text{condition à vérifier})$$

(Pour se simplifier, on va supposer que  $0 < a < b$ , les autres cas se traitent de même.) On sait que

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{et que} \quad x = ta + (1 - t)b = b + t(a - b)$$

Donc, comme  $0 \leq t \leq 1$  et que  $a - b < 0$ , on obtient

$$0 \geq t(a - b) \geq a - b$$

Et donc

$$b \geq t(a - b) + b \geq a - b + b$$

c’est-à-dire

$$a \leq x \leq b.$$

Donc  $x \in [a, b]$ . D’où  $B \subset [a, b]$ .

- Comme  $[a, b] \subset B$  et  $B \subset [a, b]$ , par *principe de double inclusion*, on a montré que  $[a, b] = B$ .

4. Montrons que

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq x\}$$

*Espace ambiant* : l’ensemble de nombres réels  $\mathbb{R}$ . Notons  $B$  l’ensemble de droite. Montrons l’égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que  $[0, 1] \subset B$ .

Soit  $x \in A$ , c’est-à-dire

$$0 \leq x \leq 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $x \in B$ , c’est-à-dire montrons que

$$x^2 \leq x \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a :

$$x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$$

car  $x \geq 0$  et  $x \leq 1$ . Donc  $x \in B$ . D’où  $[0, 1] \subset B$ .

- Montrons que  $B \subset [0, 1]$ .

Soit  $x \in B$ , c’est-à-dire

$$x^2 \leq x \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que  $x \in [0, 1]$ , c’est-à-dire montrons que

$$0 \leq x \leq 1 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Donnons le tableau de signe du polynôme  $x \mapsto x^2 - x$ .

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$Q(x)$	+	0	-	0	+

Ainsi,

$$x^2 - x \leq 0 \iff x \in [0, 1]$$

Or, comme on sait que  $x^2 \leq x$ , on en déduit que  $x \in [0, 1]$ . D’où  $B \subset [0, 1]$ .

- Comme  $[0, 1] \subset B$  et  $B \subset [0, 1]$ , par *principe de double inclusion*, on a montré que  $[0, 1] = B$ .

**Exercice 5 – Égalité par équivalence.**

- Montrons que

$$\{\alpha \in \mathbb{R} | P(\alpha) = 0\} = \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$$

Notons  $A$  l'ensemble de gauche et  $B$  l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

*Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} x \in A &\iff P(x) = 0 \quad (\text{condition vérifiée}) \\ &\iff (x-1)(x-2)(2x+1) = 0 \\ &\iff x-1 = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \{1, 2, -\frac{1}{2}\} \\ &\iff x \in B \end{aligned}$$

Donc  $A = B$ .

- Montrons que

$$\{M \in_2 (\mathbb{R}) | M^T = M\} = \{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons  $A$  l'ensemble de gauche et  $B$  l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

*Espace ambiant : l'ensemble des matrices de taille  $2 \times 2$ .*

Soit  $M \in_2 (\mathbb{R})$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} M \in A &\iff M = M^T \quad (\text{condition vérifiée}) \\ &\iff \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } c = b \\ &\iff \exists a, b, d \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b, d \in \mathbb{R}, M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b, d \in \mathbb{R}, M = aM_1 + dM_2 + bM_3 \\ &\iff M \in B \end{aligned}$$

Donc  $A = B$ .

- Montrons que

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} | (u_n) \text{ géom., } u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\} = \{(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Notons  $A$  l'ensemble de gauche et  $B$  l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

**Espace ambiant :** l'ensemble des suites.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A &\iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ géom., } u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0 \quad (\text{cond vérifiée}) \\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2q^{n+3} + 3q^{n+2} - q^n = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } (q+1)^2(2q-1) = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } (q=-1 \text{ ou } q=\frac{1}{2}) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\iff (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B \end{aligned}$$

Donc  $A = B$ .

**Exercice 6 – Ensemble des parties.** Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  lorsque

- a.  $E = \{1, 2\}$
  - b.  $E = \{a\}$
  - c.  $E = \{2, 4, 6\}$
- a. On a
- $$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$
- b. On a
- $$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$
- c. On a
- $$\mathcal{P}(\{2, 4, 6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$$

**Exercice 7 – Opérations sur les parties.** Déterminer les ensembles suivants

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{B}$$

lorsque

1.  $A = ]-\infty, 3[$  et  $B = [0, 5]$  (dans l'espace ambiant  $E = \mathbb{R}$ )
2.  $A = ]-1, +\infty[$  et  $B = [2, +\infty[$  (dans l'espace ambiant  $E = \mathbb{R}$ )
3.  $A = \{0, 1\}$  et  $B = \{1, 2\}$  (dans l'espace ambiant  $E = \{0, 1, 2, 3\}$ )

1. Soient  $A = ]-\infty, 3[$  et  $B = [0, 5]$  (espace ambiant  $E = \mathbb{R}$ ).

2. Soient  $A = ]-1, +\infty[$  et  $B = [2, +\infty[$  (espace ambiant  $E = \mathbb{R}$ ). On a :

$$A \cup B = ]-1, +\infty[ \quad A \cap B = [2, +\infty[ \quad A \setminus B = ]-1, 2[$$

$$B \setminus A = \emptyset \quad \overline{A} = ]-\infty, -1] \quad \overline{B} = ]-\infty, 2[$$

3. Soient  $A = \{0, 1\}$  et  $B = \{1, 2\}$  (dans l'espace ambiant  $E = \{0, 1, 2, 3\}$ )

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} \quad A \cap B = \{1\} \quad A \setminus B = \{0\}$$

$$B \setminus A = \{2\} \quad \overline{A} = \{2, 3\} \quad \overline{B} = \{0, 3\}$$

**Exercice 8 – Intersection & Union.**

- On note  $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\}$  et  $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$ . Déterminons l’intersection  $F_1 \cap F_2$ .

*Espace ambiant : l’ensemble des triplets  $\mathbb{R}^3$*

Soit  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\iff (x,y,z) \in F_1 \text{ et } (x,y,z) \in F_2 \\ &\iff 2x - y + 2z = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \text{ et } x + y + 3z = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On aboutit à un **système linéaire** que l’on résout par *pivot de Gauss*.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -3y - 4z = 0 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \end{aligned}$$

Nbre d’inconnues > Nbre d’équations. On choisit deux inconnues principales, par exemple  $x$  et  $y$ , que l’on exprime en fonction de l’inconnue restante.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F_1 \cap F_2 &\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = \left( -\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z \right) \\ &\iff (x,y,z) \in \left\{ \left( -\frac{5}{3}z, -1 + \frac{2}{5}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \left\{ \left( -\frac{5}{3}z, -1 + \frac{2}{5}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

- On note  $F_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$  et  $F_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ . Déterminons l’union  $F_1 \cup F_2$ .

*Espace ambiant : l’ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} x \in F_1 \cup F_2 &\iff x \in F_1 \text{ ou } x \in F_2 \\ &\iff x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \text{ ou } x^2 = 1 \text{ (cond. vérifiée)} \\ &\iff (x-2)^2 = 0 \text{ ou } x^2 = 1 \\ &\iff x = 2 \text{ ou } (x = 1 \text{ ou } x = -1) \\ &\iff x \in \{2, 1, -1\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cup F_2 = \{2, 1, -1\}$$

- On note  $F_1 = \{M \in_n (\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$  et  $F_2 = \{M \in_n (\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ . Déterminons  $F_1 \cap F_2$ .

*Espace ambiant : l’ensemble des matrices de taille  $n \times n$*

Soit  $M \in_n (\mathbb{R})$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
 M \in F_1 \cap F_2 &\iff M \in F_1 \text{ et } M \in F_2 \\
 &\iff M^T = M \text{ (cond. vérifiée) et } M^T = -M \text{ (cond. vérifiée)} \\
 &\iff M^T = M = -M \\
 &\iff 2M = 0_{n,n} \\
 &\iff M = 0_{n,n}
 \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{0_{n,n}\}$$

- On note  $F_1 = \mathbb{R}_2[x]$  et  $F_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ . Déterminons  $F_1 \cap F_2$ .

*Espace ambiant : l’ensemble des fonctions*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
 f \in F_1 \cap F_2 &\iff f \in F_1 \text{ et } f \in F_2 \\
 &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (existence para) et } f(0) = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\
 &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \text{ et } c = 0 \\
 &\iff \exists a, b \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b) \\
 &\iff f \in \{x \mapsto x(ax + b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{x \mapsto x(ax + b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

**Exercice 9 – Intersection.** Déterminer l’ensemble suivant

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\} \cap \{(a+b, 2b, 2a-3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

**Exercice 10 – Produit cartésien.** Déterminer les produits cartésiens suivants

$$\{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$\{a,b\} \times \{c,d\}$$

$$\{0\} \times \{1,2\} \times \{3,4\}$$

On a

$$\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

On a

$$\{a,b\} \times \{c,d\} = \{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$$

On a

$$\{0\} \times \{1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,1,3), (0,1,4), (0,2,3), (0,2,4)\}$$

**Exercice 11 – Vrai/Faux.** Les assertions suivantes sont-elles vérifiées pour toutes parties  $A, B, C$  d’un ensemble  $\Omega$ ? On pourra s’aider de dessins pour répondre à ces questions.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $A \cap B \subset B$                                | 6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$                                  |
| 2. $A \cup B \subset B$                                | 7. $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$                                  |
| 3. $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$      | 8. $A \cap \overline{B} \subset A \cup B$  |
| 4. $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = \Omega$    | 9. $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ |
| 5. $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$ | 10. $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$  |

1. Vrai (voir dessin)

2. Faux. Par exemple avec  $A = \{0, 1\}$  et  $B = \{2, 3\}$ ,

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \not\subset B$$

3. Vrai (ppté du cours)

4. Faux. De manière générale, par distributivité, on a,

$$(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = (B \cap A \cup B) \cap (B \cap A \cup \overline{A}) = B \cap B = B$$

5. Vrai. Par associativité,

$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap \overline{A} \cap B \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

6. Vrai. (ppté d’associativité du cours)

7. Faux. Avec  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  et  $C = \{1, 3\}$ , on a

$$A \cap (B \cup C) = \{1\} \quad \text{alors que} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 1\}$$

8. Vrai car

$$A \cap \overline{B} \subset A \subset A \cup B$$

9. Faux. Avec  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  et  $C = \{1, 3\}$ , on a

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \{2, 3\} \quad \text{alors que} \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset$$

10. Vrai car par associativité

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$$