

TD 10 – NOTION D'ENSEMBLE (CORRECTION)

Exercice 1 – Appartenance ou non-appartenance. Dans les phrases suivantes, remplacer les ____ par le symbole correspondant entre \in et \notin .

- En *italique*, les raisonnements par l'absurde.
- Cases remplies en bleues : ensembles définis de manière paramétrique (via l'existence d'un paramètre)
- Cases non remplies : ensembles définis de manière conditionnelle (via une condition)

$1 \in \{a^2 a \in \mathbb{R}\}$	car il existe
$-2 \notin \{a^2 a \in \mathbb{R}\}$	<i>car (par l'absurde) s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 = -2$</i>
$(1, 2) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 x + y = 1\}$	car
$(-1, -1) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 y = \frac{1}{x}\}$	car
$(0, 2) \in \{(t, 2+t) t \in \mathbb{R}\}$	car il existe $t = 0$
$(0, 2, 3) \notin \{(a, a+b, 0) a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	<i>car (par l'absurde) s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a = 0, a+b = 2, 0 = 3$</i>
$(1, 5, -1) \in \{(a, a+b, -a) a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$	car il existe $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b = 4$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \det(M) > 0\}$	car le déterminant est $5 > 0$
$f : x \mapsto \exp(x) \notin \mathbb{R}[x]$	<i>car (par l'absurde) si $f \in \mathbb{R}[x]$ alors f est polynomiale</i>
$x \mapsto x^3 + 1 \notin \mathbb{R}_2[x]$	car $\deg(x^3 + 1) = 3 > 2$
$x \mapsto 2x^5 + x \in \mathbb{R}_5[x]$	car $\deg(2x^5 + x) = 5$
$x \mapsto x^2 + 1 \in \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f \text{ paire}\}$	car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$
$x \mapsto x^2 + 2x + 1 \in \{f^2 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$	car il existe $f : x \mapsto x + 1$
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$	car
$(2n+1)_{n \in \mathbb{N}} \in \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2\}$	car, $\forall n \in \mathbb{N}, 2(n+1) = 2n + 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \{A^{-1} A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est inversible}\}$	car il existe $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 – Inclusion.

- Montrons que

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 1\} \subset E = \{(t, 1 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(*Espace ambiant* : l'ensemble des couples de nombres réels.)

Soit $(x, y) \in F$, c'est-à-dire vérifiant

$$2x + y = 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $(x, y) \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$\text{il existe un paramètre } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = (t, 1 - 2t) \quad (\text{existence paramètre})$$

Posons $t = x \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 1 - 2x) && \text{car } 2x + y = 1 \\ &= (t, 1 - 2t) && \text{car } t = x \end{aligned}$$

Donc $(x, y) \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F = \{(1 + a, b - 1, -a - b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \subset E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(*Espace ambiant* : l'ensemble des triplets de nombres réels.)

Soit $(x, y, z) \in F$, c'est-à-dire

$$\text{il existe 2 paramètres } a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y, z) = (1 + a, b - 1, -a - b) \quad (\text{existence param})$$

Montrons que $(x, y, z) \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$x + y + z = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a,

$$x + y + z = (1 + a) + (b - 1) + (-a - b) = 0$$

Donc $(x, y, z) \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F = \{f : x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\} \subset E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0\}$$

(*Espace ambiant* : l'ensemble des fonctions.)

Soit $f \in F$, c'est-à-dire

$$\text{il existe 2 paramètres } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \quad (\text{existence param.})$$

Montrons que $f \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Posons $x_0 = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ (bien défini car $a \neq 0$!). Alors

$$f(x_0) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

Donc $f \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, -c \leq nu_n \leq c\} \subset E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$$

(*Espace ambiant : l'ensemble des suites*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, c'est-à-dire

$$\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, -c \leq nu_n \leq c \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, -c \leq nu_n \leq c$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{c}{n} \leq u_n \leq \frac{c}{n}$$

Or les deux suites $\left(-\frac{c}{n}\right)$ et $\left(\frac{c}{n}\right)$ convergent vers 0. Donc, par **théorème d'encadrement**, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. D'où $F \subset E$.

- Montrons que

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 4x - 1\} \subset [0, +\infty[$$

(*Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels*)

Soit $x \in F$, c'est-à-dire

$$x^4 = 4x - 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $x \in [0, +\infty[$, c'est-à-dire montrons que

$$x \geq 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$x^4 = 4x - 1$$

Donc

$$x = \frac{x^4 + 1}{4} \geq 0$$

Donc $x \in [0, +\infty[$. D'où $F \subset [0, +\infty[$.

- Montrons que

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 2\} \subset E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\}$$

(*Espace ambiant : l'ensemble des couples de nombres réels*)

Soit $(x, y) \in F$, c'est-à-dire

$$x - y = 2 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $(x, y) \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$(3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Comme $x - y = 2$, on a $y = x - 2$ et donc

$$3x + y + 2 = 3x + x - 2 + 2 = 4x$$

De même,

$$x + 2y + 4 = x + 2(x - 2) + 4 = 3x$$

Finalement,

$$(3x + y + 2)(x + 2y + 4) = 12x^2 \geq 0$$

Donc $(x, y) \in E$. D'où $F \subset E$.

Exercice 3 – Non-Inclusion.

- Montrons que

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \not\subset F = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(Espace ambiant : l'ensemble des couples de nbres réels.)

On cherche un couple (x, y) qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(x, y) = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$.

- D'une part, $(x, y) \in E$ car $1 + (-1) = 0$ (condition vérifiée)
- D'autre part, montrons que $(x, y) \notin F$. Pour cela, on raisonne *par l'absurde*. Supposons par l'absurde que (x, y) est dans F . Alors,

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R}, (1, -1) = (t, t^2) \quad (\text{existence paramètre})$$

Alors $t^2 = -1 \leq 0$. C'est absurde. Donc $(x, y) \notin F$.

Ainsi, on a exhibé un élément $(x, y) \in E$ tel que $(x, y) \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{(a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \not\subset F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(Espace ambiant : l'ensemble des triplets de nbres réels.)

On cherche un triplet (x, y, z) qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(x, y, z) = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

- D'une part, $(x, y, z) \in E$ car il existe $a = 1 \in \mathbb{R}$ tel que $(1, -1, 1) = (a, -a, a)$ (existence paramètre)
- D'autre part, $(x, y, z) \notin F$ car $1 + (-1) + 1 \neq 0$ (condition non vérifiée)

Ainsi, on a exhibé un élément $(x, y, z) \in E$ tel que $(x, y, z) \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_0 = 0\} \not\subset F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$$

(Espace ambiant : l'ensemble des suites.)

On cherche une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

- D'une part, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ car $u_0 = 0$ (condition vérifiée)
- D'autre part, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$ car $\lim u_n = +\infty \neq 0$ (condition non vérifiée)

Ainsi, on a exhibé un élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique} \} \not\subset F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$$

(Espace ambiant : l'ensemble des couples de nbres réels.)

On cherche une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

- D'une part, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n$$

(condition vérifiée)

- D'autre part, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$ car $\lim u_n = +\infty \neq 0$ (car $2 > 1$) (condition non vérifiée)

Ainsi, on a exhibé un élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{A \in_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0_{2,2}\} \not\subset F = \{A \in_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$$

Espace ambiant : l'ensemble des matrices (de taille 2×2). On cherche une *matrice* $A \in_2(\mathbb{R})$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D'une part, $A \in E$ car

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,2}$$

(condition vérifiée)

- D'autre part, $A \notin F$ car A n'est pas inversible car c'est une matrice 2×2 et son déterminant vaut 0.

Ainsi, on a exhibé un élément $A \in E$ tel que $A \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

- Montrons que

$$E = \{A^2 \mid A \in_2(\mathbb{R})\} \not\subset F = \{A \in_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ inversible}\}$$

(**Espace ambiant** : l'ensemble des matrices (de taille 2×2 .)

On cherche une *matrice* $M \in_2(\mathbb{R})$ qui appartient à E mais qui n'appartient pas à F

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- D'une part, $M \in E$ car

$$\text{il existe } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in_2(\mathbb{R}) \text{ tq } M = A^2$$

(existence paramètre)

- D'autre part, $M \notin F$ car M n'est pas inversible car c'est une matrice 2×2 et son déterminant vaut 0.

Ainsi, on a exhibé un élément $M \in E$ tel que $M \notin F$. Donc $E \not\subset F$.

Exercice 4 – Double inclusion. Démontrer l'égalité $A = B$ par double inclusion lorsque

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
2. $A = \{(a - b, b, -2a + 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$
3. $A = [a, b]$ et $B = \{ta + (1 - t)b \mid t \in \mathbb{R}\}$ (pour a, b deux réels)
4. $A = [0, 1]$ et $B = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq x\}$

1. Montrons que

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Espace ambiant : l'ensemble de couples de nombres réels \mathbb{R}^2 . Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $A \subset B$.

Soit $u = (x, y) \in A$, c'est-à-dire

$$4x - y = 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $u = (x, y) \in B$, c'est-à-dire montrons que

il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ (existence paramètre)

Posons $t = x - 1 \in \mathbb{R}$ (et donc $x = t + 1$). On a

$$\begin{aligned} (x, y) &= (t + 1, y) && \text{car } t = x - 1 \\ &= (t + 1, 4x - 1) && \text{car } 4x - y = 1 \\ &= (t + 1, 4(t + 1) - 1) && \text{car } t = x - 1 \\ &= (t + 1, 4t + 3) \end{aligned}$$

Donc $u \in B$. D'où $A \subset B$.

- Montrons que $B \subset A$.

Soit $u = (x, y) \in B$, c'est-à-dire

il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (t + 1, 4t + 3)$ (existence paramètre)

Montrons que $u = (x, y) \in A$, c'est-à-dire montrons que

$$4x - y = 1 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$4x - y = 4(t + 1) - (4t + 3) = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$$

Donc $u = (x, y) \in A$. D'où $B \subset A$.

- Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $A = B$.

2. Montrons que

$$\{(a-b, b, -2a+3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$

Espace ambiant : l'ensemble de triplets de nombres réels \mathbb{R}^3 . Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $A \subset B$.

Soit $u = (x, y, z) \in A$, c'est-à-dire

il existe deux paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = (a-b, b, -2a+3b)$ (existence paramètre)

Montrons que $u = (x, y, z) \in B$, c'est-à-dire montrons que

$$2x - y + z = 0 \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a

$$2x - y + z = 2(a-b) - b + (-2a+3b) = 2a - 2b - b - 2a + 3b = 0$$

Donc $u = (x, y, z) \in B$. D'où $A \subset B$.

- Montrons que $B \subset A$.

Soit $u = (x, y, z) \in B$, c'est-à-dire

$$2x - y + z = 0 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $u = (x, y, z) \in A$, c'est-à-dire montrons que

il existe deux paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = (a-b, b, -2a+3b)$ (existence paramètre)

Posons $a = x + y \in \mathbb{R}$ et $b = y \in \mathbb{R}$ (et donc $a - b = x$) On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a-b, b, z) && \text{par choix de } a \text{ et } b \\ &= (a-b, b, -2x+y) && \text{car } 2x - y + z = 0 \\ &= (a-b, b, -2(a-b) + b) \\ &= (a-b, b, -2a+3b) \end{aligned}$$

Donc $u = (x, y, z) \in A$. D'où $B \subset A$.

- Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $A = B$.

3. Soient $a < b$. Montrons que

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

Espace ambiant : l'ensemble de nombres réels \mathbb{R} . Notons B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $[a, b] \subset B$.
Soit $x \in [a, b]$, c'est-à-dire

$$a \leq x \leq b \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $x \in B$, c'est-à-dire montrons que

$$\text{il existe un paramètre } t \in [0, 1] \text{ tel que } x = ta + (1-t)b \quad (\text{existence paramètre})$$

Posons $t = \frac{x-b}{a-b}$. Tout d'abord, $t \in [0, 1]$ car

$$\begin{array}{ll} a \leq x \leq b & \\ \text{donc } a-b \leq x-b \leq 0 & \\ \text{donc } 1 \geq \frac{x-b}{a-b} \geq 0 & \text{car } a-b < 0 \\ \text{donc } 1 \geq t \geq 0 & \end{array}$$

De plus,

$$ta + (1-t)b = \frac{x-b}{a-b} \times a + \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right)b = x$$

Donc $x \in B$. D'où $[a, b] \subset B$.

- Montrons que $B \subset [a, b]$.
Soit $x \in B$, c'est-à-dire

$$\text{il existe un paramètre } t \in [0, 1] \text{ tel que } x = ta + (1-t)b \quad (\text{existence paramètre})$$

Montrons que $x \in [a, b]$, c'est-à-dire montrons que

$$a \leq x \leq b \quad (\text{condition à vérifier})$$

(Pour se simplifier, on va supposer que $0 < a < b$, les autres cas se traitent de même.) On sait que

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{et que} \quad x = ta + (1-t)b = b + t(a-b)$$

Donc, comme $0 \leq t \leq 1$ et que $a-b < 0$, on obtient

$$0 \geq t(a-b) \geq a-b$$

Et donc

$$b \geq t(a-b) + b \geq a-b+b$$

c'est-à-dire

$$a \leq x \leq b.$$

Donc $x \in [a, b]$. D'où $B \subset [a, b]$.

- Comme $[a, b] \subset B$ et $B \subset [a, b]$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $[a, b] = B$.

4. Montrons que

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \leq x\}$$

Espace ambiant : l'ensemble de nombres réels \mathbb{R} . Notons B l'ensemble de droite. Montrons l'égalité de ces deux ensembles par *double inclusion*.

- Montrons que $[0, 1] \subset B$.

Soit $x \in A$, c'est-à-dire

$$0 \leq x \leq 1 \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $x \in B$, c'est-à-dire montrons que

$$x^2 \leq x \quad (\text{condition à vérifier})$$

On a :

$$x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$$

car $x \geq 0$ et $x \leq 1$. Donc $x \in B$. D'où $[0, 1] \subset B$.

- Montrons que $B \subset [0, 1]$.

Soit $x \in B$, c'est-à-dire

$$x^2 \leq x \quad (\text{condition vérifiée})$$

Montrons que $x \in [0, 1]$, c'est-à-dire montrons que

$$0 \leq x \leq 1 \quad (\text{condition à vérifier})$$

Donnons le tableau de signe du polynôme $x \mapsto x^2 - x$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$Q(x)$	+	0	-	+

Ainsi,

$$x^2 - x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0, 1]$$

Or, comme on sait que $x^2 \leq x$, on en déduit que $x \in [0, 1]$. D'où $B \subset [0, 1]$.

- Comme $[0, 1] \subset B$ et $B \subset [0, 1]$, par *principe de double inclusion*, on a montré que $[0, 1] = B$.

Exercice 5 – Égalité par équivalence.

- Montrons que

$$\{\alpha \in \mathbb{R} | P(\alpha) = 0\} = \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$$

Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

Espace ambiant : l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow P(x) = 0 && \text{(condition vérifiée)} \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } x-2 = 0 \text{ ou } 2x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \{1, 2, -\frac{1}{2}\} \\ &\Leftrightarrow x \in B \end{aligned}$$

Donc $A = B$.

- Montrons que

$$\{M \in {}_2(\mathbb{R}) | M^T = M\} = \{\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

Espace ambiant : l'ensemble des matrices de taille 2×2 .

Soit $M \in {}_2(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} M \in A &\Leftrightarrow M = M^T && \text{(condition vérifiée)} \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telle que } c = b \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, d \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, d \in \mathbb{R}, M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists a, b, d \in \mathbb{R}, M = aM_1 + dM_2 + bM_3 \\ &\Leftrightarrow M \in B \end{aligned}$$

Donc $A = B$.

- Montrons que

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ géom.}, u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0\} = \{(v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Notons A l'ensemble de gauche et B l'ensemble de droite et raisonnons par équivalence.

Espace ambiant : l'ensemble des suites.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A &\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ géom.}, u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0 \quad (\text{cond vérifiée}) \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, 2q^{n+3} + 3q^{n+2} - q^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } (q+1)^2(2q-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \text{ avec } (q = -1 \text{ ou } q = \frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B \end{aligned}$$

Donc $A = B$.

Exercice 6 – Ensemble des parties. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ lorsque

a. $E = \{1, 2\}$

b. $E = \{a\}$

c. $E = \{2, 4, 6\}$

a. On a

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

b. On a

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

c. On a

$$\mathcal{P}(\{2, 4, 6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$$

Exercice 7 – Opérations sur les parties. Déterminer les ensembles suivants

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{B}$$

lorsque

1. $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0, 5]$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
2. $A =]-1, +\infty[$ et $B = [2, +\infty[$ (dans l'espace ambiant $E = \mathbb{R}$)
3. $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$ (dans l'espace ambiant $E = \{0, 1, 2, 3\}$)

1. Soient $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0, 5]$ (espace ambiant $E = \mathbb{R}$).

2. Soient $A =]-1, +\infty[$ et $B = [2, +\infty[$ (espace ambiant $E = \mathbb{R}$). On a :

$$\begin{array}{lll} A \cup B & = &]-1, +\infty[\\ B \setminus A & = & \emptyset \\ \overline{A} & = &]-\infty, -1] \\ \overline{B} & = &]-\infty, 2[\end{array}$$

3. Soient $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 2\}$ (dans l'espace ambiant $E = \{0, 1, 2, 3\}$)

$$\begin{array}{lll} A \cup B & = & \{0, 1, 2\} \\ B \setminus A & = & \{2\} \\ A \cap B & = & \{1\} \\ \overline{A} & = & \{2, 3\} \\ A \setminus B & = & \{0\} \\ \overline{B} & = & \{0, 3\} \end{array}$$

Exercice 8 – Intersection & Union.

• On note $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$. Déterminons l'intersection $F_1 \cap F_2$.

Espace ambiant : l'ensemble des triplets \mathbb{R}^3

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow (x, y, z) \in F_1 \text{ et } (x, y, z) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow 2x - y + 2z = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \text{ et } x + y + 3z = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On aboutit à un **système linéaire** que l'on résout par *pivot de Gauss*.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -x - 3y - 4z = 0 \end{cases} & L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \end{aligned}$$

Nbre d'inconnues > Nbre d'équations. On choisit deux inconnues principales, par exemple x et y , que l'on exprime en fonction de l'inconnue restante.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$$

• On note $F_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$ et $F_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$. Déterminons l'union $F_1 \cup F_2$.

Espace ambiant : l'ensemble des nbres réels \mathbb{R}

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par *équivalence*.

$$\begin{aligned} x \in F_1 \cup F_2 &\Leftrightarrow x \in F_1 \text{ ou } x \in F_2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \text{ ou } x^2 = 1 \text{ (cond. vérifiée)} \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \text{ ou } x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } (x = 1 \text{ ou } x = -1) \\ &\Leftrightarrow x \in \{2, 1, -1\} \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cup F_2 = \{2, 1, -1\}$$

- On note $F_1 = \{M \in_n (\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$ et $F_2 = \{M \in_n (\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$. Déterminons $F_1 \cap F_2$.

Espace ambiant : l'ensemble des matrices de taille $n \times n$

Soit $M \in_n (\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
 M \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow M \in F_1 \text{ et } M \in F_2 \\
 &\Leftrightarrow M^T = M \text{ (cond. vérifiée) et } M^T = -M \text{ (cond. vérifiée)} \\
 &\Leftrightarrow M^T = M = -M \\
 &\Leftrightarrow 2M = 0_{n,n} \\
 &\Leftrightarrow M = 0_{n,n}
 \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{0_{n,n}\}$$

- On note $F_1 = \mathbb{R}_2[x]$ et $F_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$. Déterminons $F_1 \cap F_2$.

Espace ambiant : l'ensemble des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
 f \in F_1 \cap F_2 &\Leftrightarrow f \in F_1 \text{ et } f \in F_2 \\
 &\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (existence para) et } f(0) = 0 \text{ (cond. vérifiée)} \\
 &\Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \text{ et } c = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b) \\
 &\Leftrightarrow f \in \{x \mapsto x(ax + b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

Donc

$$F_1 \cap F_2 = \{x \mapsto x(ax + b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 9 – Intersection. Déterminer l'ensemble suivant

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 2\} \cap \{(a + b, 2b, 2a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 10 – Produit cartésien. Déterminer les produits cartésiens suivants

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \qquad \{a, b\} \times \{c, d\} \qquad \{0\} \times \{1, 2\} \times \{3, 4\}$$

On a

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

On a

$$\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

On a

$$\{0\} \times \{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(0, 1, 3), (0, 1, 4), (0, 2, 3), (0, 2, 4)\}$$

Exercice 11 – Vrai/Faux. Les assertions suivantes sont-elles vérifiées pour toutes parties A, B, C d'un ensemble Ω ? On pourra s'aider de dessins pour répondre à ces questions.

- | | |
|--|--|
| 1. $A \cap B \subset B$ | 6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 2. $A \cup B \subset B$ | 7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ |
| 3. $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$ | 8. $A \cap \overline{B} \subset A \cup B$ |
| 4. $(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = \Omega$ | 9. $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ |
| 5. $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$ | 10. $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$ |

1. Vrai (voir dessin)

2. Faux. Par exemple avec $A = \{0, 1\}$ et $B = \{2, 3\}$,

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \not\subset B$$

3. Vrai (ppté du cours)

4. Faux. De manière générale, par distributivité, on a,

$$(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = (B \cap A \cup B) \cap (B \cap A \cup \overline{A}) = B \cap B = B$$

5. Vrai. Par associativité,

$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap \overline{A} \cap B \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

6. Vrai. (ppté d'associativité du cours)

7. Faux. Avec $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$, on a

$$A \cap (B \cup C) = \{1\} \quad \text{alors que} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 1\}$$

8. Vrai car

$$A \cap \overline{B} \subset A \subset A \cup B$$

9. Faux. Avec $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$, on a

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \{2, 3\} \quad \text{alors que} \quad \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset$$

10. Vrai car par associativité

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$$