# XVI. Calcul de dérivées

Le but de ce chapitre est de se re-familiariser avec le **calcul** de **dérivées**, sans rentrer dans les détails de la théorie. La rédaction des exemples peut donc manquer de rigueur qui sera rajoutée par la suite.

## 1 Dérivées usuelles

| **Ensemble de définition** | **Fonction** | **Ensemble de dérivabilité** | **Dérivée** |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = k, \quad k$ constante | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $f(x) = \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ |
| $[0, +\infty[$ | $f(x) = \sqrt{x}$ | $]0; +\infty[$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = \mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \mathrm{e}^x$ |
| $]0, +\infty[$ | $f(x) = \ln(x)$ | $]0; +\infty[$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |

## 2 Opérations sur les dérivées

| | |
|---|---|
| Somme | $(u+v)' = u' + v'$ |
| Multiplication par un réel | pour $k \in \mathbb{R}$ (constante), $\quad (ku)' = ku'$ |
| Produit | $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ |
| Inverse | $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ |
| Quotient | $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ |

**Exemple 2.1** Calculer les dérivées suivantes sans se soucier des domaines de définition.

| **Fonction** | **Dérivée** |
|---|---|
| $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$ | $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$ |
| $f(x) = 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$ | $f'(x) = 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$ | $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ | $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ |
| $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ | $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}(5x-3)$ | $f'(x) = \frac{15x-3}{2\sqrt{x}}$ |

| Composée | $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$ |
|---|---|
| | $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ |
| | $(\exp(u))' = u' \times \exp(u)$ |
| | $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$ |
| | $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

**Exemple 2.2** Calculer les dérivées suivantes sans se soucier des domaines de définition.

| **Fonction** | **Dérivée** |
|---|---|
| $f(x) = \sqrt{2x^2+3x+4}$ | $f'(x) = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+4}}$ |
| $f(x) = (6x^2+3x+7)^3$ | $f'(x) = 9(4x+1)(6x^2+3x+7)^2$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-3}}$ | $f'(x) = -\frac{5}{2(5x-3)^{\frac{3}{2}}}$ |
| $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ | $f'(x) = -\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ |
| $f(x) = \ln(2x+1)$ | $f'(x) = \frac{2}{2x+1}$ |

## 3 Lien avec la monotonie

**Proposition 3.1** Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$.
1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors $f$ est croissante sur $I$.
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors $f$ est décroissante sur $I$.

**Exemple 3.2** Tracer le tableau de variation de la fonction suivante

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{array}$$

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$

En étudiant les racines de ce polynôme de degré 2, on en déduit le tableau de signe de $f'$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\star$ | $\searrow$ | $\star$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

? Le tableau de variations peut servir à déterminer les extrema d'une fonction.

**Exemple 3.3** On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Dresser son tableau de variations et en déduire ses éventuels extrema.

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$$

On en déduit le tableau de signe de $f'$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4\mathrm{e}^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ |

On en déduit que la fonction $f$ admet un minimum en 0 (atteint en $x = 0$) et n'admet pas de maximum.

? Cela peut servir pour démontrer une inégalité : on passe tout à gauche, on dresse le tableau de variations de la fonction correspondante, et on en déduit des informations sur le signe de la fonction.

**Exemple 3.4** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) \leqslant x - 1$.

On souhaite montrer que

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) - x + 1 \leqslant 0.$$

Pour cela, on introduit la fonction suivante

$$g: \begin{array}{rcl} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - x + 1 \end{array}$$

La fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On en déduit le tableau de signe de la fonction $g'$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit le tableau de variation de la fonction $g$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Ainsi, la fonction $g$ est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. En particulier, on en déduit que $g(x) \leqslant 0$ pour tout réel $x > 0$, c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1.$$

**Proposition 3.5** Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$.
Si la fonction $f$ vérifie

(P) pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$,

(E) l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions,

alors, la fonction $f$ est strictement croissante sur $I$.

**Proposition 3.6** Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$.
Si la fonction $f$ vérifie

(N) pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$,

(E) l'équation $f'(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions,

alors, la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$.

**Exemple 3.7** Montrer que la fonction $f$ suivante est strictement croissante.

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a les propriétés suivantes.

(P) Pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$.

(E) Et l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution (donnée par $x = 0$).

Donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

## 4 Tangente

**Proposition 4.1** Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $a \in I$. Alors la **tangente** de la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ est la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

**Exemple 4.2** Déterminer l'équation de la tangente de la fonction exponentielle au point de coordonées $(0, 1)$.

Comme $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = x + 1.$$