EXERCICE 1

a) $5\times6\times7\times8\times9 = \dfrac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}{1\times2\times3\times4}$

$= \dfrac{9!}{4!}$

b) $n(n-1)(n-2) = \dfrac{1\times2\times\dots\times(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n}{1\times2\times\dots\times(n-3)}$

$= \dfrac{n!}{(n-3)!}$

c) $2\times4\times6\times\dots\times(2n) = 2\times1\times2\times2\times2\times3\times\dots\times2\times n$

$= 2^n\times1\times2\times3\times\dots\times n$

$= 2^n\times n!$

d) $1\times3\times5\times\dots\times(2n+1) = \dfrac{1\times2\times3\times4\times\dots\times(2n)\times(2n+1)}{2\times4\times\dots\times(2n)}$

$= \dfrac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$

en utilisant la question c)

EXERCICE 2

1. $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!}$

$= \dfrac{8!}{3!\times5!}$

$= \dfrac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}}$

$= \dfrac{\cancel{6}\times7\times8}{\cancel{2}\times\cancel{3}}$

$= 7\times8$

$= 56$

$(2n)! = 1\times2\times3\times4\times\dots\times$

$2\times n! = \boxed{2}\times1\times2\times3\times4\times\dots\times n$

$= \boxed{2}\times2\times3\times4\times\dots\times n$

2. $\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} \times \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \times 0!}$

$$= \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times 4\times 5\times \cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times 5}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times 1\times 2\times \cancel{1}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}}$$

$$= \frac{4\times 5\times 5}{2}$$

$$= 2\times 5\times 5$$

$$= 50$$

3. $\dfrac{\binom{10}{7}}{\binom{10}{4}} = \dfrac{\frac{10!}{7!\,3!}}{\frac{10!}{4!\,6!}}$

$$= \frac{\cancel{10!}}{7! \times 3!} \times \frac{4! \times 6!}{\cancel{10!}}$$

$$= \frac{4\times\cancel{3!}\times\cancel{6!}}{7\times\cancel{6!}\times\cancel{3!}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

4. $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{\frac{10!}{3!\,7!}}{\frac{15!}{3!\,12!}}$

$$= \frac{10!}{\cancel{3!}\times 7!} \times \frac{12! \times \cancel{3!}}{15!}$$

$$= \frac{10\times 9\times 8\times\cancel{7!}\times\cancel{12!}}{\cancel{7!}\times 15\times 14\times 13\times\cancel{12!}}$$

$$= \frac{\cancel{5}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times 3\times 4\times 2}{\cancel{5}\times\cancel{3}\times 7\times\cancel{2}\times 13}$$

$$= \frac{24}{91}$$

$$\frac{\frac{720}{6}}{\frac{720\times 7}{24}} = \frac{\cancel{720}}{6}\times\frac{24}{\cancel{720}\times 7} = \frac{\cancel{6}\times 4}{\cancel{6}\times 7}$$

$$2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n$$

$$= 2\times 1\times 2\times 2\times 2\times 3\times\ldots\times 2\times n$$

$$= 2^n \quad n!$$

EXERCICE 3

Soient x, a, b des réels.

Faisons d'abord un triangle de Pascal

$n=0$: 1
$n=1$: 1 1
$n=2$: 1 2 1
$n=3$: 1 3 3 1
$n=4$: 1 4 6 4 1
$n=5$: 1 5 10 10 5 1
$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1

a) $(a+b)^6 = 1 \times a^6 + 6 . a^5 . b + 15 \times a^4 \times b^2 + 20 . a^3 \times b^3 + 15 . a^2 \times b^4 + 6 . a . b^5 + 1 \times b^6$

b) $(2-x)^5 = 1 \times 2^5 + 5 \times 2^4 \times (-x) + 10 \times 2^3 \times (-x)^2 + 10 \times 2^2 \times (-x)^3 + 5 \times 2 \times (-x)^4 + 1 \times (-x)^5$
$= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$

c) $(2x+1)^4 = 1 \times (2x)^4 + 4 \times (2x)^3 \times 1 + 6 \times (2x)^2 \times 1^2 + 4 \times (2x) \times 1^3 + 1 \times 1^4$
$= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

d) $(x^2+2)^3 = 1 \times (x^2)^3 + 3 \times (x^2)^2 \times 2 + 3 . x^2 \times 2^2 + 1 \times 2^3$
$= x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

EXERCICE 4

1. En utilisant le binôme de Newton, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k$$
$$= (x+1)^n$$

2. On a

• $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$

• $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = 0$$

• $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

EXERCICE 5

Soit $0 \leq p \leq k \leq n$. On a

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \times \frac{\cancel{k}!}{p!(k-p)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,p!\,(k-p)!}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\;\frac{(n-p)!}{(n-k)!\,(k-p)!}$$

$$= \binom{n}{p}\frac{(n-p)!}{(k-p)!\,(n-p-(k-p))!}$$

$$= \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$$

EXERCICE 8

proba qu'au moins 2 personnes aient un anniv pareil

= 1 - proba que personne n'ait le même anniv

$$= 1 - \frac{\text{nbre de config avec que des anniv} \neq}{\text{nbre de config. d'anniv total}}$$

$$= 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-18)}{365 \times 365 \times \cdots \times 365}$$

$$= 1 - \frac{\frac{365!}{(365-19)!}}{365^{19}}$$

EXERCICE 6

1. Anagramme = permutation des lettres

⇝ " Maison " $6!$

⇝ " Missisipi " $10!$

⇝ " Abracadabra " $11!$

2. $\underbrace{(n-1)}_{\text{la 1ière personne sert } n-1 \text{ mains}} \times (n-2) \times \dots \times \underbrace{1}_{\text{l'avant dernière pers, } n-1 \text{ ième sert 1 main}} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

3. $4!$

EXERCICE 7

1. Choix de 2 cartes parmi 52 : $\binom{52}{2}$

2. $\underbrace{\binom{13}{1}}_{\text{choix d'une carte pique parmi les 13 pique}} \times \underbrace{\binom{51}{4}}_{\text{choix des 4 cartes parmi les 51 restantes}}$

3. $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{choix des 2 valets parmi les 4}} \underbrace{\binom{48}{3}}_{\text{choix des 3 cartes restantes parmi dans le jeu sans les valets}}$

4. $\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix d'un as qui n'est pas carreau}} \underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{choix de 2 cartes carreau}} \underbrace{\binom{36}{2}}_{\text{choix de 2 cartes restantes dans le jeu sans les as (4 cartes) et sans les carreaux (13-1 cartes car on a déjà enlevé l'as de carreau}}$

$+ \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{choix de l'as de carreau}} \underbrace{\binom{12}{1}}_{\text{choix d'une carte carreau sauf l'as}} \underbrace{\binom{36}{3}}_{\text{choix de 3 cartes restantes (pas as ni carreau)}}$

5. $\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{choix d'une des quatre couleurs}} \times \underbrace{\binom{13}{5}}_{\text{choix des 5 cartes de la même couleurs}}$