TD 11 – Limite d'une fonction

Exercice 1 – Calculs de limite, sans FI. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{1}{x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{9}{x\sqrt{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^5 + \frac{6}{x} + 13$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x^2+2x+1}{x-2}$

9) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-2x-5}{\sqrt{x-3}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(1+\sqrt{x})$

Exercice 2 – Calculs de limite, avec FI. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+3x-\frac{1}{4x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)}$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} (6+x^2)e^x$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3-e^{2x}$

Exercice 3 – Calculs de limites. Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\ln(x-1)$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1)-\ln(x+4)$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2+1)-2\ln(x)$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3+x^2}$

9) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice 4 – Limite classique (par encadrement).

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad 1+x\leqslant e^x\leqslant 1+xe^x$$

2. En déduire la limite en 0 de la fonction $x\mapsto \frac{e^x-1}{x}$.

Exercice 5 – Limite classique (par encadrement).

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x>-1,\qquad \frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$$

2. En déduire la limite en 0 de la fonction $x\mapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$.
3. En déduire les limites suivantes

$$x\mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ en } +\infty \qquad \text{et} \qquad x\mapsto (1+x)^{\ln(x)} \text{ en } 0^+$$

Pour calculer ses limites, on passera par la forme exponentielle.

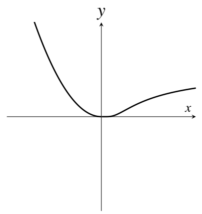
Exercice 6 – Des limites, encore... Déterminer les limites suivantes.

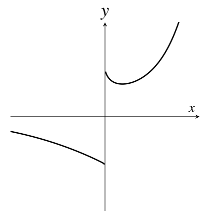
$$1)\ x\mapsto (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}} \text{ en } 0 \qquad\qquad 2)\ x\mapsto (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} \text{ en } +\infty$$

Exercice 7 – Fonctions définies par morceaux. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ x^2 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases} \qquad \forall x\in\mathbb{R}^*,\ g(x)=\begin{cases} e^{x\ln(x)} & \text{si } x>0\\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x<0\end{cases}$$

1. Déterminer si la fonction f admet une limite en 0.
2. Déterminer si la fonction g admet une limite en 0. *On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 4.*
3. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, déterminer celle représentative de la fonction f et celle représentative de la fonction g.





Exercice 8 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad f(x)=\ln(x)\times\ln(\ln(x)).$$

1. Déterminer son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer les limites de f aux extrémités de $\mathscr{D}_f$.

Exercice 9 – Étude de fonctions. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer : son ensemble de définition, sa parité, ses limites aux bornes de son ensemble de définition, son tableau de variations et tracer l'allure de la courbe.

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x \mapsto \ln(x^2+1)-x$$

$$x \mapsto x^2 e^{-x} \qquad x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Exercice 10 – Calcul de limite par encadrement. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geqslant 4, \qquad \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

Exercice 11 – Calcul de limite par minoration.

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x \geqslant 0, \qquad e^x \geqslant x^2$$

2. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$.

Exercice 12 – Théorème de la limite monotone - Illustrations. Tracer l'allure d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants,

1. Fonction croissante majorée et minorée
2. Fonction croissante majorée et non minorée
3. Fonction croissante non majorée et minorée
4. Fonction croissante non majorée et non minorée
5. Fonction décroissante majorée et minorée
6. Fonction décroissante majorée et non minorée
7. Fonction décroissante non majorée et minorée
8. Fonction décroissante non majorée et non minorée

et indiquer ce que cela implique sur les limites en $\pm\infty$.

Exercice 13 – Théorème de la limite monotone. Soient f une fonction décroissance définie sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Exercice 14 – Théorème de la limite monotone. Soit f une fonction croissante sur $]0,1[$. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la fonction f admet une limite finie ℓ à droite en a qui vérifie $f(a) \leqslant \ell$.

Exercice 15 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^-.
3. Déterminer la limite de $ue^{\frac{1}{u}}$ quand $u \to 0^+$.
4. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^+$. *On utilisera le fait que pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.*

Exercice 16 – Asymptote oblique. Soit une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$ lors que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la fonction f suivante

$$f : x \mapsto \frac{x^2+e^x}{x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. On notera a le réel obtenu.
4. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x) - ax$. On notera b le réel obtenu.
5. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Exercice 17 – Vrai ou Faux ?. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsque l'assertion est fausse, donner un contre-exemple (on pourra se contenter d'un graphe).

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - a = 0$.
2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors elle tend vers 1 en $+\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 1$
6. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
7. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle tend vers 5 en $+\infty$ alors f est majorée par 5.
8. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et que g tend vers 0 en $+\infty$ alors f tend vers 0 en $+\infty$.
9. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, alors soit elle admet une limite finie en $+\infty$, soit elle diverge vers $+\infty$.