TD 14 – Limites de fonction

Exercice 1 – Calculs de limite, sans FI.

1) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{x^3} \left(= \frac{1}{(-2)^3}\right) = -\frac{1}{8}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3} \left(= \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^3} \left(= \frac{1}{0^-}\right) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{9}{x\sqrt{x}} \left(= \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^5 + \frac{6}{x} + 13 (= -(-\infty)+0) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{x^2+x+1} \left(= \sqrt{1^2+1+1}\right) = \sqrt{3}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} \left(= \sqrt{+\infty}\right) = +\infty$

8) $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{3x^2+2x+1}{x-2} \left(= \frac{17}{0^+}\right) = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{-2x-5}{\sqrt{x-3}} \left(= -\frac{11}{0^+}\right) = -\infty$

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}(1+\sqrt{x}) \left(= \frac{1}{0^+} \times +\infty\right) = +\infty$

Exercice 2 – Calculs de limite, avec FI.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4} = +\infty$ par croissances comparées

3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2x^3+x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to0} x \times \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\frac{1}{4x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3+13x^2+3x-1}{4x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \times \frac{1+\frac{13}{4x}+\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}}{1+\frac{1}{4x}} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)^2} = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{x-3}{x-2} \left(= \frac{-1}{0^-}\right) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1} \left(= \frac{0}{1}\right) = 0$ par croissances comparées

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{1-xe^{-x}+e^{-x}}{1+\frac{\ln x}{x}} \left(= +\infty \times \frac{1-0+0}{1+0}\right) = +\infty$ par croissances comparées $\times 3$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} (6+x^2)e^x = 0$ par croissances comparées

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - e^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(x^3e^{-2x}-1) = -\infty$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{x^2-1} == \lim\limits_{x\to+\infty} 2x \times \frac{1+\frac{1}{2x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = +\infty$

Exercice 3 – Calculs de limite, avec FI.

1) $\lim\limits_{x\to1^+} (x^2-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{u\to0^+} (u+2)u\ln(u) = 0$ par croissances comparées

2) $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition car $\lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

3) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3^+} \frac{1}{x-3}\left(1-\frac{1}{x+3}\right) \left(= \frac{1}{0^+} \times \left(1-\frac{1}{6}\right)\right) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)-\ln(x+4) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right) = 0$ par comp. car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+4} = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 0$ par comp. car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3+x^2} = +\infty$ par composition car $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Exercice 4 – Fonctions définies par morceaux.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \begin{cases} e^{x\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminons si la fonction f admet une limite en 0.
   - Étude de la limite en 0^+. Pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Donc,
   $$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$
   par composition, car
   $$\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to-\infty} e^x = 0.$$
   - Étude de la limite en 0^-. Pour tout $x < 0$, $f(x) = x^2$. Donc,
   $$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^2 = 0.$$
   - Conclusion. La fonction f admet une limite en 0^+, une limite en 0^- et ces deux limites sont égales donc elle admet une limite en 0 donnée par
   $$\lim_{x\to0} f(x) = 0.$$
2. Déterminons si la fonction g admet une limite en 0.
   - Étude de la limite en 0^+. Pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{x\ln(x)}$. Donc,
   $$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln(x)} = 1$$
   par composition, car
   $$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par c.c.} \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to0} e^x = e^0 = 1.$$

- Étude de la limite en 0^-. Pour tout $x<0$, $g(x)=\frac{xe^x}{1-e^x}$. Donc,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0^+} e^x\times\frac{x}{1-e^x}=-1.$$

- Conclusion. La fonction g admet une limite en 0^+, une limite en 0^-. Cependant, ces deux limites sont différentes donc la fonction g n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad f(x)=\ln(x)\times\ln(\ln(x)).$$

1. La quantité $f(x)$ est bien définie si et seulement si

$$x>0 \qquad \text{et} \qquad \ln(x),$$

c'est-à-dire, par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$x>0 \qquad \text{et} \qquad x>1.$$

Donc $\mathscr{D}_f=]1,+\infty[$.

2. - Limite en 1. À première vue, on est face à une forme indéterminée de la forme $0\times\infty$. On va se ramener à une croissance comparée pour résoudre cette forme indéterminée. En posant $X=\ln(x)$, on obtient

$$\lim_{x\to 1^+}\ln(x)\times\ln(\ln(x))=\lim_{X\to 0}X\ln(X)=0 \qquad \text{par croissances comparées.}$$

Donc, la fonction f tend vers 0 quand x tend vers 1.

- Limite en $+\infty$. On peut la déterminer directement sans croissance comparée. On a

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty \ \text{ et } \lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty \text{ donc par composition } \lim_{x\to\infty}\ln(\ln(x))=+\infty.$$

Enfin, par produit, on obtient que

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty.$$

Exercice 6 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

1. La quantité $f(x)$ est bien définie lorsque

$$\frac{x+1}{x-1}>0.$$

Pour déterminer l'ensemble des réels x vérifiant cette condition, on trace le tableau de signe de la quantité considérée.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

On en déduit que

$$\mathscr{D}_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

2. Tout d'abord, le domaine de définition de f est symétrique par rapport à zéro donc on peut étudier la parité de f. Soit $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. On a

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-f(x).$$

Donc f est impaire.

3. - Étude de la limite en $+\infty$. On a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to 1}\ln(X)=0.$$

Donc par composition,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

- Étude de la limite en 1. On a

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty.$$

Donc par composition,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty.$$

- Étude de la limite en -1. Comme f est impaire, on a

$$\lim_{x\to -1}f(x)=-\lim_{x\to 1}f(x)=-\infty.$$

- Étude de la limite en $-\infty$. Comme f est impaire, on a

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1.$$