Interrogation du 01/12/2025

1. a) On a: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$
$\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ Donc par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

b)
$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \frac{2^n}{n^3} \frac{\left(\frac{n^2}{2^n+1}\right)}{\left(1+\frac{\ln(n)}{n^3}\right)}$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} + 1 = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(n)}{n^3} = 1$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^3} = +\infty$ par croissances comparées

Finalement, par opérations,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

2. .

```
def listesuite(n):
        L=[]
        for k in range(0, n+1):
                u = k**2+1
                L.append(u)
        return(L)
```

3.
   - On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 4).
   - Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3 = -\frac{3}{4} \times (u_n - 4) \geqslant 0.$$

car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4. Donc $u_n - 4 \leq 0$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Donc, par *théorème de la limite monotone*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

Or, d'après l'étape précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient,

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 3.$$

En résolvant cette équation *par équivalence*, on obtient,

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}\ell = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 4$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

4. Soit $(x,y) \in F$, c'est-à-dire

$$x + y = 3 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

Montrons que $(x,y) \in E$, c'est-à-dire montrons que

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y) = (t, 3-t) \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

Posons $t = x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (x,y) &= (x, 3-x) && \text{car } x+y=3 \\ &= (t, 3-t) && \text{par choix de } t \end{aligned}$$

<u>Donc</u> $(x,y) \in E$. D'où $F \subset E$.