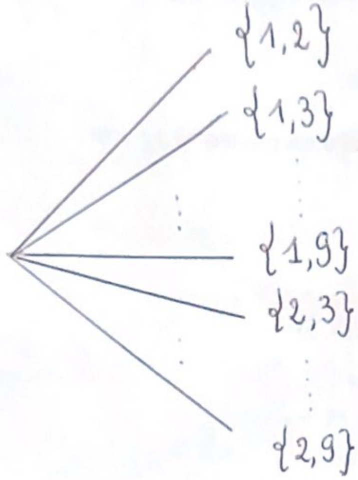
Exercice 1 (Proba uniforme)

- Tirage simultané (pas d'ordre)



$\star$ $\text{card}\,\Omega = \underset{1}{8} + \underset{2}{7} + \underset{3}{6} + \underset{4}{5} + \underset{5}{4} + \underset{6}{3} + \underset{7}{2} + \underset{8}{1} + \underset{9}{0}$

$= \dfrac{8 \times 9}{2} = 36$

$= \binom{9}{2}$

$\star$ card ("les deux num sont pairs")

$= \underset{2}{3} + \underset{4}{2} + \underset{6}{1} + \underset{8}{0} = \binom{4}{2}$

$= 6$

$\star$ card ("les deux num sont impairs")

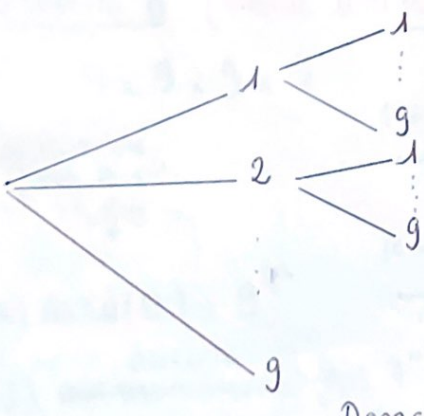
$= \underset{1}{4} + \underset{3}{3} + \underset{5}{2} + \underset{7}{1} + \underset{9}{0} = \binom{5}{2}$

$= 10$

$P(\text{"même parité"}) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{10}{36} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$

union disjointe

- Tirage avec remise (ordre)



$\star$ $\text{card}\,\Omega = 9 \times 9 = 81$

$\star$ card ("les deux pairs")

$= 4 \times 4$

$\star$ card ("les deux impairs")

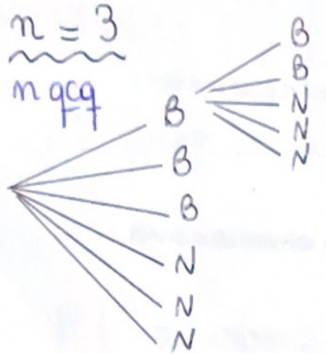
$= 5 \times 5$

Donc $P(\text{"même parité"}) = \dfrac{16}{81} + \dfrac{25}{81} = \dfrac{41}{81}$

Exercice 2 (Proba uniforme)

∘ $\underset{\sim\sim}{n=3}$

n qcq



$\star$ $\text{card } \Omega = 6 \times 5 \times 4$ $\quad 2n(2n-1) \times \dots \times (n+1)$

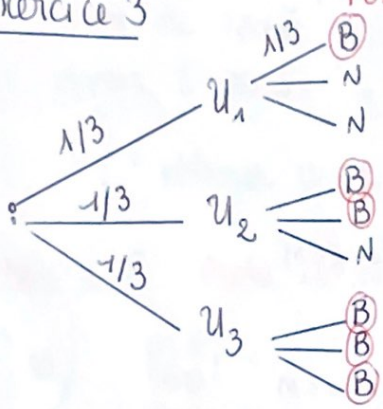
$\star$ $\text{card}(\text{"3 boules noires"}) = 3 \times 2 \times 1$

$n \times (n-1) \times \dots \times 1$

$$P(\text{"3 boules noires"}) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{20}$$

$$= \frac{n!}{2n \times \dots \times (n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 3 — (Formule des proba totales) Formule de Bayes



1. Formule des proba totales :

$$P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B) + P(U_3)P_{U_3}(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{3}$$

2. Retour en arrière → Formule de Bayes

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\ (\text{cf exo } 1)} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Exercice 6 (Proba uniforme)

1. $\underbrace{9}_{\text{possibilité pour le 1er chiffre}} \times 9 \times 9 \times 9$ ...

2. a) $\text{card}(\Omega) = 9^4$

card ("~~au moins une fois~~ aucun 7")

$= 8 \times 8 \times 8 \times 8$

⚠ "au moins" regarder l'évènement contraire

. $P(\bar{A}) = \frac{8^4}{9^4}$

. $P(A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8^4}{9^4}$

b) $P(\text{"tous pairs"}) = \frac{4^4}{9^4}$

c) $P(\text{"tous les chiffres diff"})$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{9^4}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{9^3}$$

Exercice 7 (Proba uniforme) $32 = 8 \times 4$

$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{8}$

le jeu où on a ôté les coeurs

1. $P(\text{"aucun coeur"}) = \dfrac{\binom{\boxed{32-8}}{8}}{\binom{32}{8}} = \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

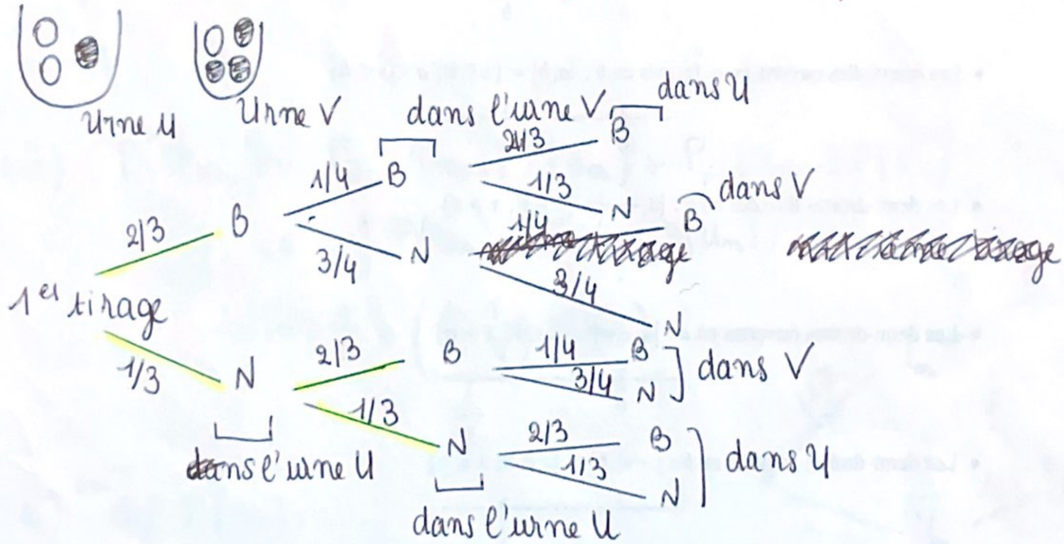
$P(\text{"au moins un coeur"}) = 1 - \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

2. Nbre de carré possible $= 8$ $(77 - 88 - \ldots)$

Avoir 2 carrés $= \binom{8}{2}$

$P(\text{"obtenir deux carrés"}) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{8}}$

Exercice 8 (Proba conditionnelle, Formule des proba totales)



1a) $P(U_2) = \cancel{P(U_1 \cap N)} = P_{U_1}(N)\,P(U_1) = \frac{1}{3} \times 1$

$= P(U_1 \cap N)$

b) $P(U_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ en lisant l'arbre

$= P_{U_2}(U_3)\,P(U_2) + P_{V_2}(U_3)\,P(V_2)$ (proba totale)

$= \cancel{P(N)} \times \frac{1}{3} + \cancel{P(B)} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$$= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \quad \text{(proba composées)}$$

$$= \frac{2}{3} \times P_{V_2}(B_2) \times P_{U_3}(B_3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$p_n = P(U_n)$

$p_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} p_n$

$u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} u_n$

3. On cherche $P_{B_2}(U_2)$.

On cherche à remonter le temps → Bayes + proba totale

$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)\, P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{P_{U_2}(B_2) P(U_2) + P_{V_2}(B_2) P(V_2)}$$

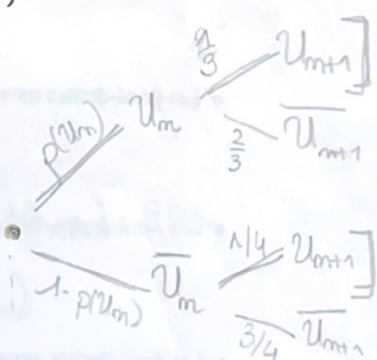
$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

4 a) $$P(U_{n+1}) = P_{U_n}(U_{n+1})\, P(U_n) + P_{V_n}(U_{n+1})\, P(V_n)$$

$$= \frac{1}{3} P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n))$$

$$= \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} P(U_n)$$



b)
```
def P(n):
    p = 1          # p1
    for k in range(2, n+1):
        p = 1/4 + 1/12 p
    return(p)
```

5. $$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} U_n \end{cases}$$

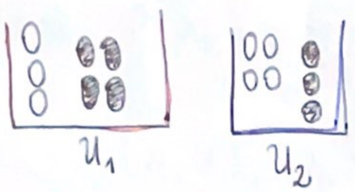
suite arithmético-géométrique :

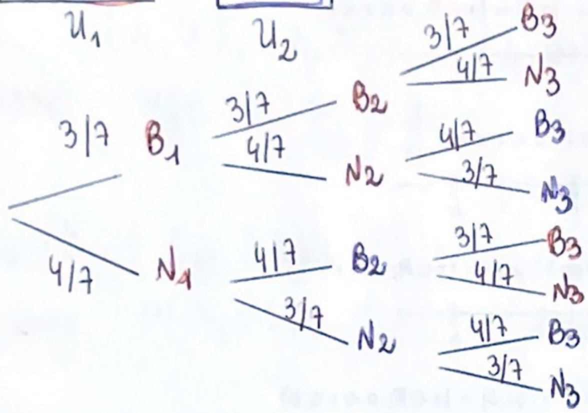
$\ell = \frac{3}{11}$

$$U_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}$$

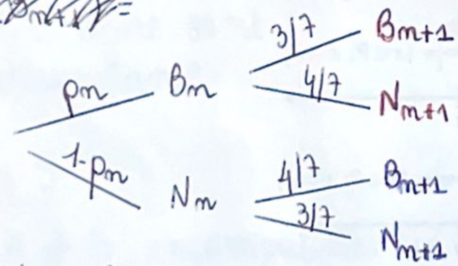
$$P(B_n) = P_{U_n}(B_n)\,P(U_n) + P_{V_n}(B_n)\,P(V_n)$$
$$= \frac{2}{3} \times u_n + \frac{1}{4}(1-u_n)$$
$$= \frac{40}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{4}{11}$$

Exercice 9 (même principe que l'exo 8)





1. $\cancel{P(B_{n+1})}=$



$p_1 = \frac{3}{7}$

$$P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{N_n}(B_{n+1}) \times P(N_n)$$
$$p_{n+1} = \frac{3}{7} \times p_n + \frac{4}{7} \times (1-p_n)$$
$$= \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n$$

2. $\left(\ell = \frac{1}{2}\right)$ $\quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

...rcice 4 $\quad \Omega = [\![1 \dots 6]\!]^2$ en particulier card $\Omega = 36$

- $A_1 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$
  donc $P(A_1) = \frac{5}{36}$

- $A_2 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
  donc $P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $B = \{(4,1), (4,2), \dots, (4,6)\}$
  donc $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $A_1 \cap B = \{(4,2)\}$
  donc $P(A_1 \cap B) = \frac{1}{36}$

- $A_2 \cap B = \{(4,3)\}$
  donc $P(A_2 \cap B) = \frac{1}{36}$

Ccl : $P(A_1 \cap B) \neq P(A_1) \times P(B)$
donc A_1 et B ne sont pas indépendants

$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P(B)$
donc A_2 et B sont indépendants.

Exercice 5

Soient A et B incompatibles ie. $(A \cap B) = \emptyset$.

- A et B sont indé $\iff 0 = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  $\iff P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$

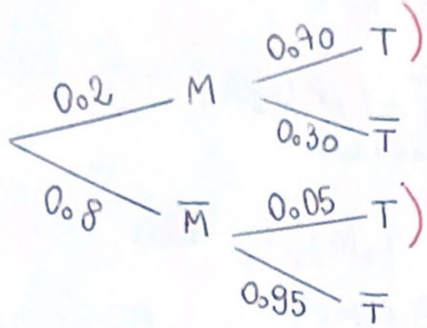
- A et A sont indé $\iff P(A \cap A) = P(A) \times P(A)$
  $\iff P(A)^2 = P(A)$
  $\iff P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Informations : $P(M) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ M : "malade"

T : "test positif"

$P_M(T) = 0{,}70$

$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}95$



1) On cherche $P_T(M)$ "retour dans le temps" → Bayes

$$P_T(M) = \frac{P(M)\,P_M(T)}{P(T)}$$

Or, formule des proba totales ($(M, \overline{M})$ syst. complet d'évènements)

$$P(T) = P(M)\,P_M(T) + P(\overline{M})\,P_{\overline{M}}(T)$$
$$= 0{,}18$$

Finalement,

$$P_T(M) = \frac{0{,}2 \times 0{,}70}{0{,}18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \simeq 0{,}78$$ pas hyper efficace

2) $P(T) = 0{,}44$

puis $P_T(M) \simeq 0{,}956$ efficace.

Exercice 11 M_k : "la machine k est en panne"

1. On cherche $P(\underbrace{M_1 \cup M_2 \cup M_3}_{S})$ S "le système est en panne"

On va calculer (ou formule du crible + indé.)

$$P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) = P(\overline{M_1})P(\overline{M_2})P(\overline{M_3}) \quad \text{par indé}$$
$$= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$

puis $P(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = p_1+p_2+p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3 = P(S)$

2. On veut $P_S(M_1)$ "retour ds le tps" → Bayes.

$$P_S(M_1) = \frac{P(M_1)P_{M_1}(S)}{P(S)}$$ car si M_1 en panne, le syst. est en panne

$$= \frac{p_1 \times 1}{p_1+p_2+\dots}$$

Exercice 12 (faire un arbre)

- $\overline{A}$: " soit aucun pile soit aucun face"

$\overline{A} = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)$

$P(\overline{A}) = (1-p)^3 + p^3$ (union disjointe + indé.)

donc $P(A) = 1-(1-p)^3 - p^3$

- $B = \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3)}_{\text{aucun pile}} \cup \underbrace{(P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)}_{\text{exactement un pile}}$

$P(B) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$

- $A \cap B$ = "il est apparu exactement un pile (et au-un face)"

$P(A \cap B) = 3p(1-p)^2$

- si $p = 1/4$

$P(A) = \frac{3^2}{2^4}$; $P(B) = \frac{3^3}{2^5}$; $P(A\cap B) = \frac{3^3}{2^6}$

Non

- si $p = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A\cap B) = \frac{3}{8}$

Non.