TD 16 – Calcul de dérivées

Savoir calculer une dérivée

Exercice 1 – Compléter le tableau suivant. *Cela nécessite éventuellement des calculs au brouillon.*

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
	$f(x) = 13x^2 + 3x - 49$		$f'(x) =$
	$g(x) = \frac{1}{3x}$		$g'(x) =$
	$h(x) = \frac{3}{4x+2}$		$h'(x) =$
	$i(x) = \sqrt{4x+2}$		$i'(x) =$
	$f(x) = (-x+6)(3x-2)$		$f'(x) =$
	$f(x) = \frac{4x+8}{21x-3}$		$f'(x) =$
	$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$		$f'(x) =$
	$f(x) = \frac{1}{x^2}$		$f'(x) =$

Exercice 2 – Compléter le tableau suivant. *Cela nécessite éventuellement des calculs au brouillon.*

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
	$f(x) = 1 + \ln(1+x)$		$f'(x) =$
	$g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} - x$		$g'(x) =$
	$h(x) = \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$		$h'(x) =$
	$i(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-1}$		$i'(x) =$

Savoir étudier les variations d'une fonction

Exercice 3 – On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$$

1. Déterminer f'.

2. Dresser le tableau de signe de f'.
3. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
4. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f.
5. La fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
6. La fonction f admet-elle un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
7. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

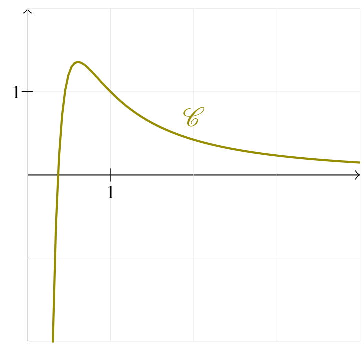
Exercice 4 – Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x.$$

Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}.$$

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.



1. Etudier le signe de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer la valeur exacte du maximum de f sur $]0,+\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 puis la tracer sur le graphique.

Extraits de concours

Exercice 6 – ECRICOME ECS 2017, Exercice 1. On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
2. Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.

Exercice 7 – ECRICOME ECS 2016, Exercice 1. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 8 – ECRICOME ECE 2023, Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:
$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$
2. Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes
$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$
3. *Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse* 1.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.