TP 02 – Exercices supplémentaires

Exercice 1 **[Suite définie par récurrence]** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n^2 - 1$$

Écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant u_n en sortie. *On vérifiera que la valuation de la fonction en* `2` *donne* `362`.

Entrée [1]:

Entrée [2]:

Out [2]:

Exercice 2 **[Suite récurrente linéaire d'ordre 2]** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant u_n en sortie. *On vérifiera que la valuation de la fonction en* `0` *et en* `1` *renvoie bien* `1` *et que la valuation de la fonction en* `4` *donne* `5`.

Entrée [3]:

Entrée [4]:

Out [4]:

Exercice 3 [**Suite définie par une somme**] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$$

Écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant u_n en sortie. *On vérifiera que la valuation de la fonction en* `1` *renvoie* `0.5` *et que la valuation de la fonction en* `4` *donne* `1.625`*.*

Entrée [5]:

Entrée [6]:

Out [6]:

Exercice 4 [**Suite définie par un produit**] Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par

$$\forall n \in\geqslant 2, \quad u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)$$

Écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant u_n en sortie. *On vérifiera que la valuation de la fonction en* `2` *renvoie* `0.875` *et que la valuation de la fonction en* `4` *donne environ* `0.83`*.*

Entrée [7]:

Entrée [8]:

Out [8]:

Exercice 5 **[Suites imbriquées]** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

Écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant u_n et v_n en sortie. *On vérifiera que la valuation de la fonction en* `0` *renvoie* `(1,0)` *et que la valuation de la fonction en* `4` *donne* `(13,21)`.

Entrée [9]:

Entrée [10]:

Out [10]:

Exercice 6 **[Suite récurrente linéaire d'ordre supérieur]** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k^2+1}$$

Écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant u_n en sortie. *On vérifiera que la valuation de la fonction en* `0` *et en* `1` *renvoie bien* `1` *et que la valuation de la fonction en* `4` *donne* `1.98`.

Entrée [11]:

Entrée [12]:

Out [12]:

Exercice 7 [**Autour des coefficients binomiaux**] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on définit

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier plusieurs techniques de calculs de coefficients binomiaux.

1. Première méthode : à partir de la définition.

   (a) Écrire une fonction, appelée `factorielle`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie la valeur de `n!`. *On vérifiera que* `factorielle(5)` *renvoie* `120`.

Entrée [13]:

   (b) En déduire une fonction, appelée `binom1`, qui prend en argument deux entiers `n` et `k`, et qui renvoie la valeur du coefficient binomial de $\binom{n}{k}$. *On vérifiera que* `binom1(2,5)` *renvoie* `10.0`.

Entrée [14]:

Entrée [15]:

Out [15]:

2. Deuxième façon.

   (a) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

   (b) En déduire une nouvelle fonction, appelée `binom2`, qui prend en argument deux entiers `n` et `k`, et qui renvoie la valeur du coefficient binomial de $\binom{n}{k}$. *On vérifiera que* `binom1(2,5)` *renvoie* `10.0`.

Entrée [16]:

Entrée [17]:

Out [17]: