# DS 2

*Vendredi 5 décembre 2025, 13h30 - 16h30*

---

*Les règles à respecter sont les suivantes.*

- *Les candidat·e·s sont invité·e·s à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible leurs résultats.*
- *Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
- *Pour augmenter la* ***lisibilité*** *des calculs, dans la mesure du possible, les égalités successives seront présentées en colonne (et non pas en ligne) avec les différents symboles = bien alignés.*

---

**Exercice 1 –** *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. (DS1) Pour les trois fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction.

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1+x}{x-3} \quad g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad h : x \mapsto \ln(-2x+8)$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 3.$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 12$.
a. Montrer que cette suite est croissante.
b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
c. Déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n$$

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 3$$

5. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2, \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 4)$ b. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ c. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_2$.
b. En déduire que $A$ est inversible et calculer son inverse (sans utiliser la formule du cours avec le déterminant).

8. Déterminer la limite des suites suivantes.

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n^2} + \exp(-n) + (3)^n$ b. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3n^3 + n}{n^2 + 2n}$ c. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{2^n + n^2}{n^3 + \ln(n)}$

**Exercice 2 –** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4, u_1 = 3, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} - 5u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n = 0 \end{cases}$$

Soit $(v_n)$ la suite de terme général : $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.

1. Calculer $v_0$ et $v_1$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n$.
3. En déduire que la suite ( $v_n$ ) est constante.
4. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

**Exercice 3 –** On considère la suite ( $u_n$ ) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}.$$

1. Calculer $u_1$.
2. Recopier et compléter le programme suivant qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie une liste contenant tous les termes de la suite (depuis $u_0$) jusqu'au terme de rang `n` (jusqu'à $u_n$).

```
#On importe la bibliothèque nécessaire
.......................................
#On définit une fonction
.......................................
    #On introduit une liste vide
    .........................
    #On créé une variable appelée u
    #qui contient la valeur de u0 au départ
    ...............
    #On ajoute la valeur de u0 à la liste
    ................
    for k in range(...., .....):
        #On calcule le terme d'après de la suite
        #à partir du terme précédent
        ........................
        #et on l'ajoute à la liste
        .......................
    #On renvoie la liste complète
    .......................
```

3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0, u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante. Peut-on déduire quelque chose sur la convergence éventuelle de la suite?
5. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}, v_n = {u_n}^2$.
   (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer $v_{k+1} - v_k$ en fonction de $k$.
   (b) En calculant de deux manières différentes $\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star, v_n = 3 - 2^{1-n}$.
   (c) En déduire $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   (d) Montrer que $(u_n)$ converge et donner la valeur de sa limite $\ell$.

**Exercice 4 –** .

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On étudie dans ce problème deux méthodes pour déterminer les puissances successives de la matrice $M$.

**Partie A : Diagonalisation**

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soient
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$
Montrer que l'équation $PX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution (que l'on explicitera en fonction de $a, b$ et $c$ ).
2. En déduire que $P$ est inversible et que
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. On pose : $D = P^{-1}MP$. Calculer $D$.
4. Que dire de la matrice $D$ ? En déduire $D^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
5. Montrer que: $\forall n \geqslant 0, M^n = PD^nP^{-1}$.
6. Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $M^n$.

**Partie B : Relation de récurrence**

On pose $A = \frac{1}{4}(M - I)$, où $I$ désigne la matrice-identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

1. Expliciter les coefficients de $A$, puis calculer $A^2$.
2. Exprimer $M$ en fonction de $A$.
3. En déduire que : $M^2 = I - 8A$.
4. Montrer qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ telle que : $\forall n \in \mathbf{N}, M^n = I + u_n A$. Préciser les valeurs de $u_0, u_1$ et $u_2$.
On admet que: $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = -3u_n + 4$.
5. Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
6. Informatique : Écrire une fonction d'argument $n \in \mathbf{N}$ renvoyant la liste $[u_0, u_1, \cdots, u_n]$.
7. Déduire de la question 5, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $M^n$ en fonction de $I$ et $A$.
8. La formule de la question précédente peut-elle être étendue à $n = -1$ ?