XVII. Continuité d'une fonction

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Fonctions continues

1.1 Continuité en un point

Définition 1.1 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

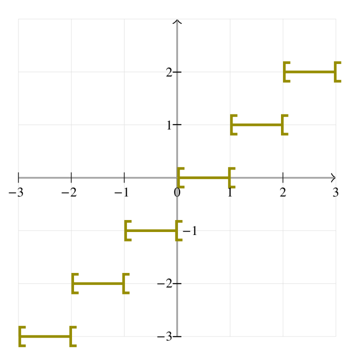
1. On dit que f **est continue en** a lorsque f admet une limite finie en a et
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a).$$
2. On dit que f **est continue à droite en** a lorsque $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
3. On dit que f **est continue à gauche en** a lorsque $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Proposition 1.2 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Alors, la fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite en a et elle est continue à gauche en a.

? La notion de continuité formalise le fait que l'on peut tracer la courbe de la fonction "sans lever le crayon". Autrement dit, là où la fonction comporte des "trous", elle est discontinue.

Exemple 1.3 La fonction partie entière est l'exemple typique de fonction discontinue. Par exemple, regardons ce qu'il se passe autour de $x = 2$.

- D'une part, $\lfloor 2 \rfloor = 2$.
- D'autre part,
$$\forall x \in [1,2[,\ \lfloor x \rfloor = 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 2-} \lfloor x \rfloor = 1.$$
- D'autre part,
$$\forall x \in]2,3],\ \lfloor x \rfloor = 2 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 2+} \lfloor x \rfloor = 2.$$



Finalement, la fonction partie entière n'est pas continue en 2, elle est seulement continue à droite.

Exemple 1.4 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^3 + x^2 + x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction est-elle continue en 0 ?

- D'une part, $f(0) = 1$.

- D'autre part,
$$\forall x > 0,\ f(x) = 2x+1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = 1.$$
Donc f est continue à droite en 0.
- D'autre part,
$$\forall x < 0,\ f(x) = x^3+x^2+x+1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 1.$$
Donc f est continue à gauche en 0.

Donc finalement, f est continue en 0.

Exemple 1.5 Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2-3x+5 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
Pour quelle·s valeur·s de k, la fonction f est-elle continue en 0 ?

- D'une part, $f(0) = k$.
- D'autre part,
$$\forall x > 0,\ f(x) = k \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x) = k.$$
- D'autre part,
$$\forall x < 0,\ f(x) = x^2-3x+5 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = 5.$$

Or la fonction f est continue en 0 si et seulement si
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0),$$
c'est-à-dire si et seulement si $k = 5$.

1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 1.6 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I)$ ou encore $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.7 Les fonctions usuelles - fonctions polynômiales, fonctions rationnelles, valeur absolue, racine carrée, exponentielle, logarithme népérien, puissances - sont continues sur leur ensemble de définition.

! C'est grâce à la propriété de continuité que l'on peut affirmer que
$$\lim_{x\to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a \ \ (a \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \ \ (a \geqslant 0) \qquad \lim_{x\to a} \ln(x) = \ln(a) \ \ (a > 0)$$

Exemple 1.8 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ (fonction nulle).
- La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ (par composition et soustraction de telles fonctions).
- Enfin, la fonction f est continue en 0 car
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Donc finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.9 On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f est continue sur $]0, 1[$ car la fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$.
- La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
- Cependant, la fonction n'est pas continue en 1 car

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq f(1).$$

Donc finalement, la fonction n'est pas continue sur $]0, +\infty[$ (pas continue en 1).

1.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 1.10

1. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Si f et g sont continues sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur I.
   (b) Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I.
   (c) Si f ne s'annule pas sur I et si f est continue sur I, $\frac{1}{f}$ est continue sur I.
   (d) Si g ne s'annule pas sur I et si f et g sont continues sur I, $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
2. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, tels que :
   (a) $\forall x \in I$, $f(x) \in J$;
   (b) f est continue sur I ;
   (c) g est continue sur J.
   Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple 1.11 On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Tout d'abord, la fonction f est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

- Puis, d'une part, la fonction $x \mapsto x + 1$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$, donc la fonction f est continue sur $]-1, +\infty[$.
- De même, la fonction f est continue sur $]-\infty, -1[$.

Exemple 1.12 On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \ln(1 + x^2).$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Tout d'abord, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x^2 \in]0, +\infty[.$$

Puis, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car

- la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Proposition 1.13 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I. Soit $\ell \in I$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que f est continue en ℓ, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

! C'est grâce à la propriété de continuité que l'on peut affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n+2) - \ln(n+1) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(1) = 0$$

! Si une suite est définie de manière récursive par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

avec f continue et que cette suite converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors la limite vérifie nécessairement

$$\ell = f(\ell).$$

Exemple 1.14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

On admet que l'on peut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. Conclure quant à la convergence de cette suite.

Il s'agit d'abord de prouver que la suite converge puis de déterminer la limite.

- Comme la suite est croissante et majorée, par théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
- De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{avec} \qquad \forall x \in]-2,+\infty[,\ f(x) = \sqrt{2+x}$$

Donc si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = f(\ell) = \sqrt{2+\ell}.$$

On en déduit que nécessairement $\ell \geqslant 0$. Puis que,

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^2 - \ell - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cancel{\ell = -1} \quad \text{ou} \quad \ell = 2$$

Finalement, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 2.

1.4 Prolongement par continuité

Définition 1.15 Soient $a \in I$ et f définie sur $I\backslash\{a\}$ (donc f n'est **pas définie en** a). On dit que f est **prolongeable par continuité en** a lorsque f admet une limite réelle en a. Dans ce cas, la fonction $\tilde{f}$ (parfois notée encore f) définie sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée **prolongement par continuité de** f **en** a.

! Ne pas confondre :

- étude de la continuité en a (la fonction est définie en a),
- étude du prolongement par continuité en a (la fonction n'est pas définie en a).

Exemple 1.16 Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par

$$f \ : \ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$$

Pour savoir si f est prolongeable par continuité en zéro, on doit étudier sa limite en zéro. Par croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \in \mathbb{R}.$$

Donc, la fonction f est prolongeable par continuité en zéro et son prolongement par continuité en 0 est donné par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.17 Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

Pour savoir si f est prolongeable par continuité en zéro, on doit étudier sa limite en zéro. On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Donc, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en zéro.

Exemple 1.18 Étudier le prolongement par continuité en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pour savoir si f est prolongeable par continuité en 1, on doit étudier sa limite en 1. Comme la fonction est définie par morceaux, on étudie sa limite à droite et sa limite à gauche. Par continuité des fonctions logarithme et exponentielle, on a

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^x = e^1 = e \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x) = \ln(1) = 0.$$

Comme les limites à droite et à gauche en 1 sont différentes, la fonction f n'admet pas de limite en 1. Donc, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

2 Théorèmes impliquant de la continuité

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Définition 2.1 Un **intervalle** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}\setminus\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\setminus\{+\infty\}$.

? Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ "sans trou". Par exemple, $]-\infty,5]$ est un intervalle mais $[-\infty,3] \cup [4,5]$ n'en est pas un.

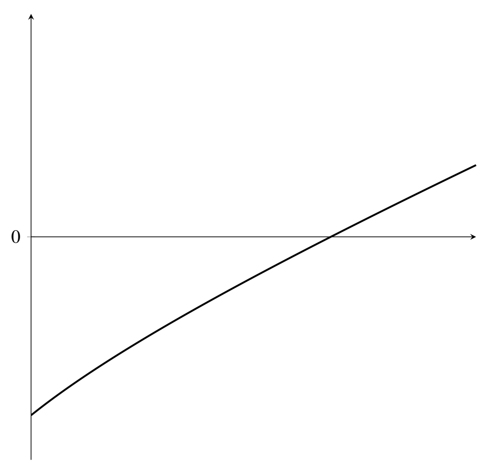
Proposition 2.2 — TVI, v1. L'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

! Autrement dit, si f est continue et que son ensemble de départ "n'a pas de trou" alors son image "n'a pas de trou".

Proposition 2.3 — TVI, v2. Soient $a < b$ deux nombres réels.
On suppose que
① la fonction f est **continue** sur $[a,b]$.
Alors, pour tout $k \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $k = f(c)$.

Idées de preuve. On utilise le principe de **dichotomie** (sera revu en informatique). Supposons pour simplifier que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. On crée deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Soit m_0 le milieu de $[a_0, b_0]$, on pose :
  - si $f(m_0) \geqslant 0$: $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. On a $f(a_1) \leqslant 0 \leqslant f(b_1)$.
  - si $f(m_0) < 0$: $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$. On a $f(a_1) \leqslant 0 \leqslant f(b_1)$.
- Soit m_1 le milieu de $[a_1, b_1]$, on pose :
  - si $f(m_1) \geqslant 0$: $a_2 = a_1$ et $b_2 = m_1$. On a $f(a_2) \leqslant 0 \leqslant f(b_2)$.
  - si $f(m_1) < 0$: $a_2 = m_1$ et $b_2 = b_1$. On a $f(a_2) \leqslant 0 \leqslant f(b_2)$.
- On réitère ce procédé.



À chaque étape, le segment est coupé en deux (d'où le terme de dichotomie) et on a $f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$. On montre que les deux suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers un même réel ℓ vérifiant $f(\ell) \leqslant 0 \leqslant f(\ell)$, d'où $f(\ell) = 0$. ■

Exemple 2.4 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x^2 + 2 \end{array}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[2,3]$, c'est-à-dire

$$\exists x \in [2,3],\quad 1 = f(x).$$

Geste invisible : On veut prendre $a = 2$, $b = 3$ et $k = 1$ dans le TVI (v2). Tout d'abord, en tant que fonction polynomiale, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier,

① la fonction f est continue sur $[2,3]$.

Par ailleurs, $f(2) = -2$ et $f(3) = 2$. Donc, comme $1 \in [f(2), f(3)]$, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $x \in [2,3]$ tel que $f(x) = 1$.

Exemple 2.5 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - 2x + 1 \end{array}$$

Montrer que l'élément e admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre -1 et 0.

On cherche à montrer que l'élément e admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre -1 et 0, c'est-à-dire, on cherche à montrer que

$$\exists x \in [-1,0], \quad f(x) = \mathrm{e}.$$

Geste invisible : On veut prendre $a = -1$, $b = 0$ et $k = \mathrm{e}$ dans le TVI (v2). Tout d'abord, en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier,

① la fonction f est continue sur $[-1,0]$.

Par ailleurs, $f(-1) = \mathrm{e} + 3$ et $f(0) = 2$. Donc, comme $\mathrm{e} \in [f(0), f(-1)]$ (car $2 < \mathrm{e} < 3$), en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $x \in [-1,0]$ tel que $f(x) = \mathrm{e}$. Autrement dit, l'élément e admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre -1 et 0.

Proposition 2.6 — TVI, v3. Soient $a < b$ deux nombres réels.

a) On suppose que
   ① la fonction f est **continue** sur $[a,b]$
   ② et $f(a)f(b) \leqslant 0$.
   Alors, la fonction f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

b) Autrement dit, si I est un intervalle et que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** qui ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I.

Exemple 2.7 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - 2x \end{array}$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

Geste invisible : On veut prendre $a = 0$ et $b = 1$ dans le TVI (v3). On a :

① la fonction f est **continue** sur $[0,1]$, comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
② $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 2 < 0$.

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Exemple 2.8 Montrer que l'équation $\ln(x) + 1 = -2x$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^3}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Geste invisible : On veut prendre $a = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$, $b = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $f(x) = \ln(x) + 1 + 2x$ dans le TVI (v3). On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) + 2x + 1 \end{array}$$

① la fonction f est **continue** sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^3}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, comme somme de fonctions continues sur $]0,+\infty[$, ② $f\left(\frac{1}{e^3}\right) = \frac{2}{e} > 0$ et $f\left(\frac{1}{e}\right) = -2 + \frac{2}{e^3} < 0$.

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction f s'annule au moins une fois sur $\left[\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e}\right]$. Autrement dit, l'équation $\ln(x) + 1 = -2x$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e}\right]$.

Proposition 2.9 — TVI, v4. Soient $a < b$ deux nombres réels.

a) On suppose que

① la fonction f est **continue** sur $]a, b[$.

Alors, pour tout $k \in [\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $k = f(c)$.

b) On suppose que

① la fonction f est **continue** sur $]a, b[$

② et $\lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to b} f(x) \leqslant 0$.

Alors, la fonction f s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

Exemple 2.10 Montrer que toute fonction polynomiale, de degré impair, et de coefficient dominant 1, admet au moins une racine réelle.

Geste invisible : On veut prendre $a = -\infty$ et $b = +\infty$ dans le TVI (v4). Soit P une fonction polynomiale de degré impair. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Alors,

① la fonction P est **continue** sur $\mathbb{R}$

② et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty > 0$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty < 0$.

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire P admet au moins une racine réelle.

2.2 Théorème des bornes

Définition 2.11 Un **segment** de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a < b$ deux réels.

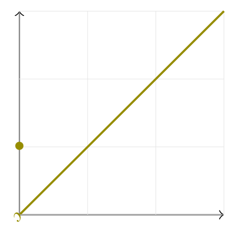
Proposition 2.12 — Théorème des bornes, v1. L'image directe d'un segment par une application continue est un segment.

Proposition 2.13 — Théorème des bornes, v2. Soient $a < b$ deux réels.
On suppose que
① la fonction f est définie sur le **segment** $[a,b]$
② la fonction f est **continue** sur $[a,b]$.
Alors f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit, elle admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

! Le théorème est faux si la fonction n'est pas continue. Par exemple, si on considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f admet un maximum, donné par 1, atteint en $x = 0$ et $x = 1$. Mais f n'admet pas de minimum.



Exemple 2.14 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) > 0.$$

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant m.$$

2. Montrer que ce résultat est faux si on ne travaille pas sur un segment.

2.3 Théorème de la bijection

Définition 2.15 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f **réalise une bijection de I dans J** lorsque :

① pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$,

② et pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I (autrement dit, tout $y \in J$ admet un unique antécédent $x \in I$ par f)

Exemple 2.16 Montrer que $f : x \mapsto 2x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

① Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 \in \mathbb{R}$.

② Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{y-1}{2}.$$

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{y-1}{2} \end{array}$$

Exemple 2.17 On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Déterminer deux intervalles I et J tels que f réalise une bijection de I dans J.

Geste invisible : Attention, f ne peut pas réaliser une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution dès que $y < 0$. Donc, on doit prendre au moins $J = [0, +\infty[$. De plus, si $y > 0$, l'équation $y = f(x)$ admet deux solutions $+\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$. Donc, il faut restreindre l'espace de départ aussi et prendre $I = [0, +\infty[$.

Montrons que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

① Tout d'abord, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \in [0, +\infty[$.

② Soit $y \in [0, +\infty[$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = x^2 \quad \Longleftrightarrow_{\text{car } y>0} \quad x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad \cancel{x = -\sqrt{y}}_{\text{car } x \geq 0}$$

Donc f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ et sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Proposition 2.18 Soit f réalisant une bijection de I dans J, de bijection réciproque g. Alors,

1. Pour tout $x \in I$, $g(f(x)) = x$ et pour tout $y \in J$, $f(g(y)) = y$.
2. Pour tout $x \in I$ et $y \in J$,
$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = g(y).$$
3. Les courbes représentatives de f et de g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. Pour tout a borne de I et tout b borne de J,
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{y \to b} g(y) = a.$$

Proposition 2.19 — Théorème de la bijection, v1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que
① f est définie sur un **intervalle** I,
② f est **continue** sur I,
③ f est **strictement monotone** sur I.
Notons alors J l'intervalle suivant (plusieurs cas) :

	f croissante	f décroissante
$I = [a,b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$I =]a,b]$	$J = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$I = [a,b[$	$J = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a)\right]$
$I =]a,b[$	$J = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$

Alors,
- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
- sa fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Proposition 2.20 — Théorème de la bijection, v2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que
① f est définie sur un **intervalle** I,
② f est **continue** sur I,
③ f est **strictement monotone** sur I.
Alors, pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

? On peut utiliser le théorème de la bijection pour
- Démontrer qu'une fonction définie sur un intervalle est bijective (utiliser la v1).
- Démontrer qu'une équation admet une unique solution (utiliser la v2).

Exemple 2.21 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, 0]$ sur un intervalle J à déterminer.

① La fonction f est définie sur l'**intervalle** $[0,1]$.
② La fonction f est **continue** sur $[0,1]$.
③ Montrons que la fonction f est **strictement croissante** sur $[0,1]$.
(P) La fonction est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 0.$$

(E) L'équation $f'(x) = 0$ admet aucune solution.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[-1, 0]$ sur $[f(-1), f(0)] = [-1, 1]$.

Exemple 2.22 Montrer que l'équation $\ln(x) = x - 3$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

On cherche à montrer

$$\exists x \in [1, +\infty[, \quad \ln(x) - x + 3 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - x + 3 \end{array}$$

① La fonction f est définie sur l'**intervalle** $[1,+\infty[$.
② La fonction f est **continue** sur $[1,+\infty[$.
③ Montrons que la fonction f est **strictement décroissante** sur $[1,+\infty[$.
(P) La fonction est dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leqslant 0$$

(E) L'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution, donnée par $x = 1$.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)] =]-\infty, 2]$. Autrement dit,

$$\forall y \in]-\infty, 2], \ \exists ! x \in [1,+\infty[, \ f(x) = y.$$

En particulier, il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire $\ln(x) = x - 3$.

Exemple 2.22 (❤) Montrer que l'équation $\ln(x) = x - 3$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

Exemple 2.23 (❤) On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans $[-1, +\infty[$, que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.