Corrigé DS 2

Exercice 1 – 1.

$$\begin{aligned} x \in Df \iff & \quad x \neq 0 \text{ et } x-3 \neq 0 \\ \iff & \quad x \neq 0 \text{ er } x \neq 3 \\ Df = & \ \mathbb{R} - \{0;3\} \end{aligned}$$

De même f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0;3\}$
f' de la forme $\left(w + \frac{v}{v}\right)' = w' + \frac{v'v - vv'}{v^2}$ arec

$$\begin{array}{lll} w(x) = \frac{1}{x} & u(x) = 1+x & v'(x) = x-3 \\ w'(x) = -\frac{1}{x^2} & u'(x) = 1 & v'(x) = 1 \end{array}$$

$\forall x \in D_f$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 \times (x-3) - (1+x) \times 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{-4}{(x-3)^2}$$

$$x \in D_g \quad \iff \quad x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$$

On étudie le signe de $x \mapsto x^2 - 3x + 2$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

Le polynôme est positif à l'extérieur des racines donc $D_g =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$ Domaine de dérivabilité: $]-\infty, 1[\cup]2; +\infty[$
g' de la Forme $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$

$$u'(x) = 2x - 3$$

$$g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$\begin{aligned} x \in D_h \iff & -2x + 8 > 0 \\ \iff & -2x > -8 \\ \iff & \quad x < \frac{-8}{-2} \\ \iff & \quad x < 4 \end{aligned}$$

$D_h =]-\infty; 4[$
Domaine de dérivabilité: $]-\infty; 4[$
h' de la forme $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = -2x + 8$ et $u'(x) = -2$
Donc $\quad h'(x) = \frac{-2}{-2x+8}$

2. - On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 12). - Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{1}{4}u_n + 3 = -\frac{1}{4} \times (u_n - 12) \geqslant 0.$$

car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 12. Donc $u_n - 12 \leq 0$ Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc, par théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 3$$

Or, d'après l'étape précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient,

$$\ell = \frac{3}{4}\ell + 3.$$

En résolvant cette équation par équivalence, on obtient,

$$\ell = \frac{3}{4}\ell + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\ell = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 12$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 12 .

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Son terme général est donc donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times 3^n$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Son terme général est donc donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 3 \times n = 3n + 2$$

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 . On commence donc par étudier son équation caractéristique donnée par

$$r^2 = 2r + 3 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2r - 3 = 0$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est donné par

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles données par

$$r_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$$

Ainsi, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \times 3^n + B \times (-1)^n.$$

Pour déterminer les constantes A et B, on étudie les deux premiers termes de la suite. On a :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 3A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 4A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ A = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{5}{4} \\ A = \frac{3}{4} \end{cases}$$

On obtient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5}{4} \times 3^n + \frac{3}{4} \times (-1)^n$$

6. Par linéarité de la somme, on obtient,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{n}(k^2-4) \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}4 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\times(n-1+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4n \end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme géométrique. On a alors,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme télescopique. On obtient donc,

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+1}-1 \end{aligned}$$

7. a. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.
$3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$
$A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
b. $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_2 = \mathrm{O}_2 \Leftrightarrow A^2 - 3A = -2\mathrm{I}_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = \mathrm{I}_2 \Leftrightarrow A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\mathrm{I}_2) = \mathrm{I}_2$
Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}\mathrm{I}_2$
Après calcul on obtient: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8. a. D' après les limites usuelles, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\exp(-n) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}3^n = +\infty \text{ car } 1 < 3$$

Donc, par somme, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et celle-ci vaut :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n = +\infty$$

b. Remarquons d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^3\left(3 + \frac{n}{n^3}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2n}{n^2}\right)} = n \times \frac{3 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}}$$

Or, en utilisant les limites usuelles, on obtient que

$$\lim_{n \to +\infty} 3 + \frac{1}{n^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$$

Donc, par multiplication, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et celle-ci vaut :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

c.Remarquons d'abord que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{2^n}{n^3} \times \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{\ln(n)}{n^3}}$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \text{ par croissances comparées et donc } \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{n^2}{2^n} = 1.$$

De même,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} = 0 \text{ par croissances comparées et donc } \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{\ln(n)}{n^3} = 1.$$

Enfin, par croissances comparées,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n^3} = +\infty$$

Donc, par multiplication, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et celle-ci vaut :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Exercice 2 – 1. Premiers termes de la suite (v_n). $v_0 = u_1 - 2u_0 = -5$ et $v_1 = u_2 - 2u_1 = -5$.
Ainsi : $v_0 = v_1 = -5$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n &= u_{n+3} - 2u_{n+2} - 3\left(u_{n+2} - 2u_{n+1}\right) + 2\left(u_{n+1} - 2u_n\right) \\ &= u_{n+3} - 5u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0$.

3. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$
C'est une équation du second degré dont le discriminant est donné par

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (2) = 1$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles données par

$$r_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$

Ainsi, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \times 1^n + B \times 2^n = A + B \times 2^n.$$

Pour déterminer les constantes A et B, on étudie les deux premiers termes de la suite. On a :

$$\begin{cases} A + B = -5 \\ A + 2B = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = 0 \end{cases}$$

On obtient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-5) + 0 \times 2^n = -5$$

Donc la suite est constante

4. $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = -5 = u_{n+1} - 2u_n$, donc $u_{n+1} = 2u_n - 5$
(u_n) est donc arithmético-géométrique.
Le point fixe vérifie : $\ell - 2\ell = -5$, donc $\ell = 5$.
Posons, $\forall n \in \mathbf{N}, w_n = u_n - 5$
Soit $n \in \mathbf{N}, w_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 2u_n - 5 - 5 = 2u_n - 10 = 2w_n$ La suite $(w_n)_n$ est donc géométrique de raison 2
$\forall n \in \mathbf{N}, w_n = (u_0 - 5)\, 2^n = -2^n$
d'où : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 5 - 2^n$.

Exercice 3 – .

1. $u_1 = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{2^n}} = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2^0}} = \sqrt{2}$

2.
```python
#On import la bibliothèque numpy
import numpy as np
#On définit une fonction
def suite(n):
    #On introduit une liste vide
    L=[ ]
    #On créé une variable appelée u
    #qui contient la valeur de u0 au départ
    u=1
    #On ajoute la valeur de u0 à la liste
    L.append(u)
    for k in range(1, n+1):
        #On calcule le terme d'après de la suite
        #à partir du terme précédent
        u=np.sqrt(u**2+1/(2**(k-1)))
        #et on l'ajoute à la liste
        L.append(u)
    #On renvoie la liste complète
    return(L)
```

3. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$:≪ $u_n \geqslant 1$ ≫.
Initialisation : $u_0 = 1$ d'après l'énoncé, donc : $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbf{N}$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
On suppose $u_n \geqslant 1$. On a : ${u_n}^2 + \frac{1}{2^n} \geqslant 1 + \frac{1}{2^n} \geqslant 1$.
Donc : $\sqrt{{u_n}^2 + \frac{1}{2^n}} \geqslant 1$
c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geqslant 1$.

4. Soit $n \geqslant 0. {u_{n+1}}^2 = {u_n}^2 + \frac{1}{2^n} \geqslant u_n^2$ et la suite (u_n) étant positive, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.
La suite est croissante et minorée donc on ne peut pas conclure avec le théorème de convergence monotone

5. (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. Par définition de la suite (u_n), on a : $v_{k+1} = {u_{k+1}}^2 = {u_k}^2 + \frac{1}{2^k} = v_k + \frac{1}{2^k}$.
Donc $\forall k \in \mathbf{N}, v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^k}$.

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Par télescopage : $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 = v_n - 1$. D'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n).$$

   En égalisant les deux résultats trouvés, on en déduit que :
$\forall n \in \mathbf{N}^\star, v_n = 1 + 2(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   (c) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Étant donné que $u_n \geqslant 1 \geqslant 0$, on a : $u_n = \sqrt{v_n}$ (et non $u_n = -\sqrt{v_n}$).
Donc $\forall n \in \mathbf{N}^\star, u_n = \sqrt{3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ et on remarque que cette formule est encore vraie pour $n = 0$.

   (d) On a : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc (u_n) converge et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Exercice 4 – Partie A:

1. Soient

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

On veut résoudre l'équation $PX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour cela, raisonnons par équivalence et résolvons le système linéaire qui apparaît grâce à la méthode du pivot de Gauss.
On a,

$$PX = B \iff \begin{cases} x + 2z = a \\ y - z = b \\ -x - z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2z & = a \\ y - z & = b \\ z & = a + c \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x + 2z = a \\ y = a + b + c \\ z = a + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -a - 2c \\ y = a + b + c \\ z = a + c \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -a - 2c \\ a + b + c \\ a + c \end{pmatrix}$$

Donc, l'équation $PX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -a - 2c \\ a + b + c \\ a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2. D'après la question 5, pour tout $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $PX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

Donc, la matrice P est inversible et son inversible est donné par:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On pose $D = P^{-1}MP$. On trouve après calculs :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. D est diagonale, donc on en déduit que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

5. On pose, pour $n \in \mathbf{N}, \mathcal{P}_n$: "$M^n = PD^nP^{-1}$".
Initialisation au rang $n = 0$: $M^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \geqslant 0$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie
Alors $M^{n+1} = MM^n = M\left(PD^nP^{-1}\right)$.
Mais $D = P^{-1}MP$ donc $M = PDP^{-1}$.
En remplaçant, on a : $M^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 0, M^n = PD^nP^{-1}$.
6. On calcule $M^n = PD^nP^{-1}$: $\forall n \geqslant 0, M^n = \begin{pmatrix} -1+2\times(-3)^n & 0 & -2+2\times(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}$.

Partie A:

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc après calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On remarque que : $A^2 = -A$.
2. $M = 4A + I$
3. A et I commutent, donc $M^2 = 16A^2 + 8AI + I^2 = 16(-A) + 8A + I$. Ainsi, $M^2 = I - 8A$.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: "$\exists u_n \in \mathbf{R}, M^n = I + u_nA$".
* Premières valeurs de (u_n) : $M^0 = I$ donc $u_0 = 0, M^1 = I + 4A$ donc $u_1 = 4$ et $M^2 = I - 8A$ donc $u_2 = -8$.
* Preuve de $\mathcal{P}_n$ par récurrence :
Initialisation Ce qui précède montre que $\mathcal{P}_0$ est vraie (ainsi que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$).
Hérédité Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geqslant 0$
Alors $M^{n+1} = MM^n = M(I + u_nA) = (4A + I)(I + u_nA) = 4u_nA^2 + (4 + u_n)A + I$.
Mais $A^2 = -A$, donc $M^{n+1} = I + (4 - 3u_n)A$. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et $u_{n+1} = 4 - 3u_n$.
Conclusion D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
5. $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = -3u_n + 4$
6. $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = -3u_n + 4$ donc la suite (u_n) est arithmético-géométrique.
On pose : $\ell = -3\ell + 4$, on trouve $\ell = 1$.
La suite $v_n = u_n - 1$ est géométrique de raison -3
$\forall n \geqslant 0, v_n = v_0(-3)^n = (u_0 - 1)(-3)^n = -(-3)^n$.
Ainsi, $\forall n \geqslant 0, u_n = v_n + \ell = 1 - (-3)^n$.
7.
```python
def suite(n):
    L=[ ]
    u=0
    L.append(u)
    for k in range(1, n+1):
        u=4-3*u
        L.append(u)
    return(L)
```
8. On en déduit que : $\forall n \geqslant 0, M^n = I + \left(1 - (-3)^n\right)A$.
9. $I + \left(1 - (-3)^{-1}\right)A = I + \frac{4}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

En faisant le produit avec M on peut vérifier que cette matrice est bien la matrice inverse de M
La formule se généralise donc à $n = -1$