TD 16 – Calcul de dérivées (Correction)

Savoir calculer une dérivée

Exercice 1 – Compléter le tableau suivant. *Cela nécessite éventuellement des calculs au brouillon.*

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$\mathbb{R}$	$f(x)=13x^2+3x-49$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=26x+3$
$\mathbb{R}^*$	$g(x)=\frac{1}{3x}$	$\mathbb{R}^*$	$g'(x)=-\frac{1}{3x^2}$
$\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$	$h(x)=\frac{3}{4x+2}$	$\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$	$h'(x)=-\frac{3}{(2x+1)^2}$
$[-1,+\infty[$	$i(x)=\sqrt{x+1}$	$]-1,+\infty[$	$i'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=(-x+6)(3x-2)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=20-6x$
$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\}$	$f(x)=\frac{4x+8}{21x-3}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\}$	$f'(x)=-\frac{20}{(7x-1)^2}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=e^{x^2}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2xe^{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{2}{x^3}$

Exercice 2 – Compléter le tableau suivant. *Cela nécessite éventuellement des calculs au brouillon.*

Ensemble de déf.	Fonction	Ensemble de dérivabilité	Dérivée
$]-1,+\infty[$	$f(x)=1+\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{1+x}$
$\mathbb{R}$	$g(x)=\frac{1+x}{1+e^x}-x$	$\mathbb{R}$	$g'(x)=\frac{e^x-x}{(1+e^x)^2}-1$
$\left]-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right[\cup\left]\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[$	$h(x)=\ln\left(2x-\frac{3}{x}\right)$	$\left]-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right[\cup\left]\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[$	$h'(x)=\frac{2x^2+3}{2x^3-3x}$
$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$	$i(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$	$i'(x)=\frac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$

Savoir étudier les variations d'une fonction

Exercice 3 – On considère la fonction

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&x^3-3x+1\end{array}$$

1. Déterminer f'.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. Et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1).$$

2. Dresser le tableau de signe de f'.

   À partir de l'expression de f' (sous forme factorisée), on en déduit son tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

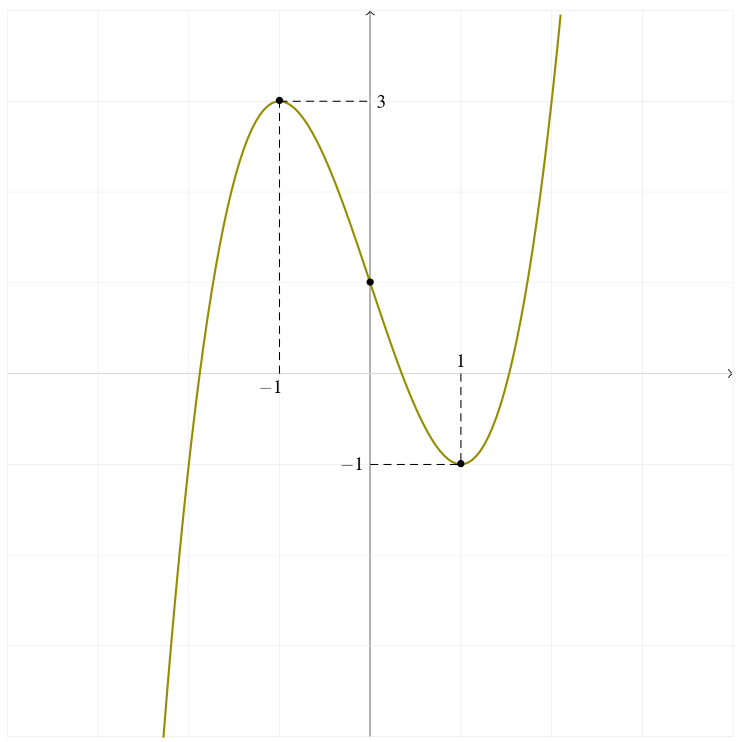
3. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

   À partir du tableau de signe de la dérivée, on en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f.

   À partir des informations que l'on a sur la fonction f (ses variations, ses limites, et ses valeurs en quelques points), on peut tracer l'allure de son graphe.



5. La fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction ne peut pas admettre de maximum.

6. La fonction f admet-elle un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.

   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la fonction ne peut pas admettre de minimum.

7. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

   On a :
$$f(1) = -1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = 3.$$
   - Comme $f(1) \neq f(-1)$, la fonction f n'est pas paire.
   - Comme $f(1) \neq -f(-1)$, la fonction f n'est pas impaire.

Exercice 4 – Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

On souhaite montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x - x - 1 \geqslant 0.$$
Pour cela, on introduit la fonction suivante
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x - 1 \end{array}$$
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1.$$
Or,
$$e^x - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0.$$
On en déduit le tableau de signe de la fonction g'.

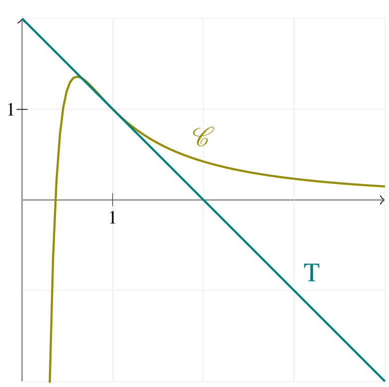
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de la fonction g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, on en déduit que $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}.$$
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.



1. Etudier le signe de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   Soit $x \in]0,+\infty[$. D'une part, $x^2 > 0$. D'autre part,

   $$1+\ln(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) \geqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

   On en déduit le tableau de signe suivant pour la fonction f.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

   La fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus,

   $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   Soit $x \in]0,+\infty[$. D'une part, $x^3 > 0$. D'autre part,

   $$-1-2\ln(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln(x) \leqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

   On peut calculer en plus que

   $$f\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

   On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\searrow$	0

3. Déterminer la valeur exacte du maximum de f sur $]0,+\infty[$.

   D'après le tableau de variation, on en déduit que f admet un maximum donné par $\frac{\mathrm{e}}{2}$ et atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 puis la tracer sur le graphique.

   Comme $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$, l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est :

   $$y = -x+2.$$

Extraits de concours

Exercice 6 – Ecricome ECS 2017, Exercice 1. On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

1. Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
2. Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.

   La correction de cette épreuve peut se trouver à l'adresse suivante (voir les questions 1.(a) et 1.(b) de l'exercice 1, **page 11**) :

   `https://www.annales-prepa.fr/wp-content/uploads/Corrige-Maths-S-Ecricome-2017.pdf`

Exercice 7 – Ecricome ECS 2016, Exercice 1. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

> La correction de cette épreuve peut se trouver à l'adresse suivante (voir la question 2 de l'exercice 1, **page 1**) :
>
> `https://www.rblld.fr/ecs2lb/docs/annales/2016/2016_ecricome-corrige.pdf`

Exercice 8 – Ecricome ECE 2023, Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:
$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$
2. Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes
$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$
3. *Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse* 1.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

> La correction de cette épreuve peut se trouver à l'adresse suivante (voir les questions 1.a), 1.b) et 1.c) de l'exercice 2, **page 5**) :
>
> `https://major-prepa.com/wp-content/uploads/2023/04/`
> `Ecricome-2023-MathAppli-corrige-Major-Prepa.pdf`