

TD 17 – CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Étude de la continuité

Exercice 1 – [S'inspirer des Exemples 1.9 et 1.9, Chapitre 17]

Étudier la continuité des fonctions suivantes:

$$\begin{aligned}
 1. f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & 2. h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} & x &\longmapsto \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \\
 3. g: [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} & 4. i: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & x &\longmapsto \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 – Prolongement par continuité. [S'inspirer des Exemples 1.16, 1.17 et 1.18, Chap 17]

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

- Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
- Justifier que f est continue sur \mathcal{D}_f .
- Déterminer la limite de f en 0.
- Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 3 – Théorème des valeurs intermédiaires. [S'inspirer de l'Exemple 2.5, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{3x} + x$$

Montrer que l'élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre 0 et 1.

Exercice 4 – Théorème des valeurs intermédiaires. [S'inspirer de l'Exemple 2.7, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} - x^2$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois.

Exercice 5 – Théorème de la bijection. [S'inspirer de l'Exemple 2.21, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} + x$$

- Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que la fonction f réalise une bijection de $] -\infty, 0]$ dans un intervalle à déterminer. On note φ la bijection réciproque associée.
- Dresser le tableau de variation de φ .

Exercice 6 – Théorème de la bijection. [S'inspirer de l'Exemple 2.22, Chapitre 17]

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xe^{-x} - 1 < 0.$$

- Montrer que l'équation $\ln(x) = e^{-x}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Montrer que $1 < \alpha < e$. On pourra commencer par montrer que $f(1) < f(\alpha) < f(e)$.

Exercice 7 – Théorème de la bijection. [S'inspirer de l'Exemple 2.23, Chapitre 17]

On considère la fonction

$$f:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \ln(x)$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
- Préciser la valeur de u_0 .
- Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Soit $n \geq 1$. Montrer que $u_n \geq \sqrt{n}$. On pourra utiliser le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x$.
- Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 8 – Théorème de la bijection en autre (*). On considère les fonctions f et g définies par

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^x}{1+e^x} \qquad x \longmapsto f(x) - x$$

- Étudier les variations de f .
- Étudier les variations de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α .
- En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 > \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(u_{n+1}).$$

- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On pourra utiliser la question 3.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut α .

Exercice 9 – Théorème de la bijection (*). On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$$

1. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
2. Tracer l'allure de la courbe.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

Exercice 10 – Suites définies de manière implicite ()**. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On considère la fonction

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - nx$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $] -\infty, \ln(n)]$ et une unique solution v_n sur $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.
4. Soit $n \geq 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 11 – Existence d'un point fixe ()**. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

Exercice 12 – Étude d'une suite définie par récurrence (*). On considère la fonction

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 + 8}{6}$$

et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0, 2[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Justifier que f est continue.
2. Étudier les variations de f sur \mathbb{R}_+ .
3. Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ sur le même schéma.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Donner le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
6. Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$, $f(x) \in [0, 2]$.
7. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$?
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. *On pourra utiliser la question 5.*
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ .
10. Montrer que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .