Chapitre 11 : Limites d'une fonction

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur d_f, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; I désigne un intervalle de d_f ; a désigne un nombre réel ou $-\infty$ et b désigne un nombre réel ou $+\infty$.

1 Limite (éventuelle) d'une fonction

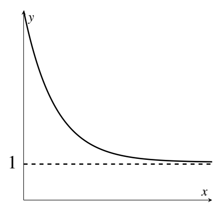
On cherche définir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que le résultat de la limite appartienne à $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1.1 Convergence en $+\infty$ ou $-\infty$

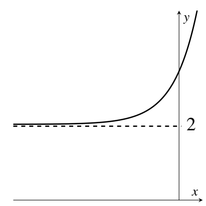
Définition 1.1 — Convergence vers un réel. Soit ℓ un réel.

	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en $+\infty$ vers $\ell \in \mathbb{R}$	$I =]a, +\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \geqslant A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$
Cv. en $-\infty$ vers $\ell \in \mathbb{R}$	$I =]-\infty, b[$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \leqslant A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$

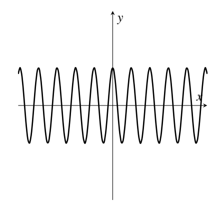
Comme pour les suites, ces phrases quantifiées traduisent le fait que l'écart entre la fonction est sa limite est, à partir d'un certain moment, aussi petit que l'on souhaite.



La fonction semble converger vers 1 en $+\infty$.



La fonction semble converger vers 2 en $-\infty$.



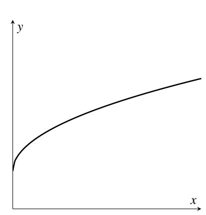
La fonction semble ne pas admettre de limites (oscillations).

Exemple 1.2

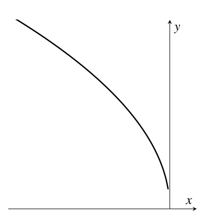
$$\lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Définition 1.3 — Convergence vers l'infini. Soit ℓ un réel.

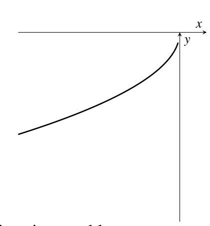
	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en $+\infty$ vers $+\infty$	$I =]a, +\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$
Cv. en $-\infty$ vers $+\infty$	$I =]-\infty, b[$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$
Cv. en $+\infty$ vers $-\infty$	$I =]a, +\infty[$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \geqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$
Cv. en $-\infty$ vers $-\infty$	$I =]-\infty, b[$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ x \leqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$



La fonction semble converger vers $+\infty$ en $+\infty$.



La fonction semble converger vers $+\infty$ en $-\infty$.



La fonction semble converger vers $-\infty$ en $-\infty$.

Exemple 1.4

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

1.2 Limite en un point, à gauche ou à droite

Définition 1.5 — Limite à droite en un point. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

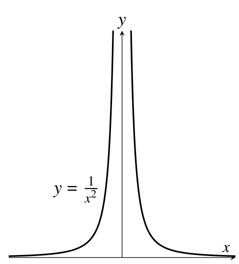
	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en x_0^+ vers ℓ	$I =]x_0, b[$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$
Cv. en x_0^+ vers $+\infty$	$I =]x_0, b[$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant M$
Cv. en x_0^+ vers $-\infty$	$I =]x_0, b[$	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant M$

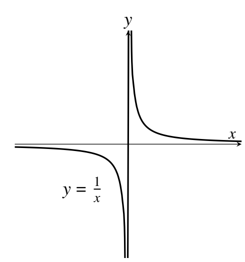
Définition 1.6 — Limite à gauche en un point. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

	Voisinage	Notation	Définition
Cv. en x_0^- vers ℓ	$I =]a, x_0[$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$	$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant \varepsilon$
Cv. en x_0^- vers $+\infty$	$I =]a, x_0[$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant M$
Cv. en x_0^- vers $-\infty$	$I =]a, x_0[$	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$	$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \ \lvert x - x_0 \rvert < \alpha \Rightarrow f(x) \leqslant M$

Exemple 1.7 Etudier les limites en 0^+ et 0^- des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. *On donne en plus les graphes de ces deux fonctions.*

Limite	Intervalle	Point où on étudie la limite	Résultat
$x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0^+	$]0, +\infty[$	0^+	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0^-	$]-\infty, 0[$	0^-	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0^+	$]0, +\infty[$	0^+	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0^-	$]-\infty, 0[$	0^-	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$





1.3 Limite en un point

Définition 1.8 — Limite en un point. On dit que f admet une limite (finie ou infinie) en un point x_0 si

- elle admet une limite en x_0^+,
- elle admet une limite en x_0^-,
- et que ces deux limites coïncident.

On note alors

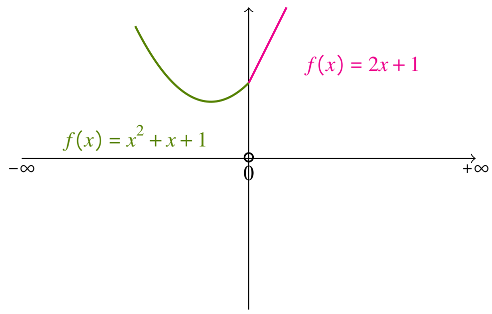
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Exemple 1.9

Limite	Limite à droite	Limite à gauche	Résultat
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en 0	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ en 0	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0

Exemple 1.10 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Étudier la limite en 0 de f.

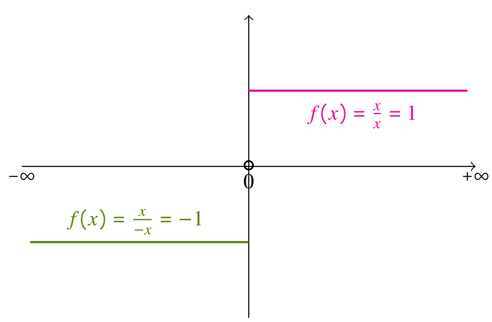
- Limite à droite : Pour tout $x > 0$, $f(x) = 2x+1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+1 = 1$.
- Limite à gauche : Pour tout $x < 0$, $f(x) = x^2+x+1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+x+1 = 1$.

Finalement, les limites à droite et à gauche en zéro coïncident, donc f admet une limite en 0 qui est donnée par

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Exemple 1.11 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}.$$



Étudier la limite en 0 de f.

- Limite à droite : Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$.
- Limite à gauche : Pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{-x} = -1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = 1$.

Finalement, les limites à droite et à gauche en zéro ne coïncident pas, donc f n'admet pas de limite en 0.

1.4 Unicité de la limite

Proposition 1.12 Si une fonction admet une limite finie, en un point ou en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors sa limite est unique.

Attention, on a unicité de la limite à droite et unicité de la limite à gauche mais cela ne veut pas dire que les limites à droite et à gauche sont les mêmes (cf exemples précédents). De plus, on ne parle pas d'unicité pour les limites infinies mais une fonction ne peut pas non plus avoir deux limites infinies "différentes".

2 Calculer une limite

2.1 Les limites des fonctions usuelles

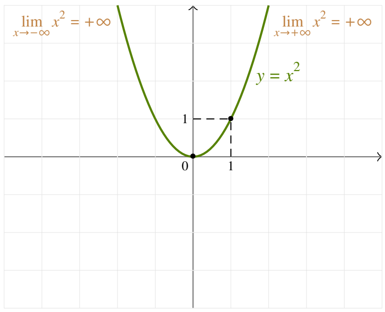
Proposition 2.1 — **Fonctions puissances entières.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

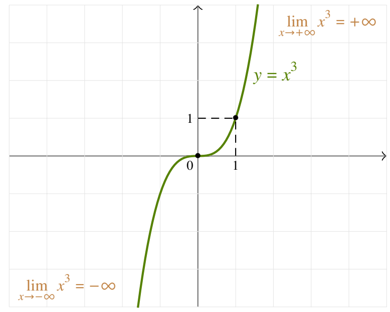
- **Cas n pair :**

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

- **Cas n impair :**

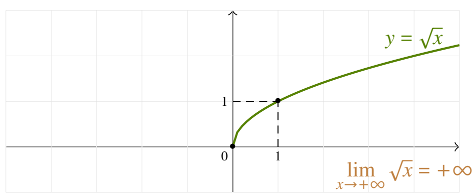
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$





Proposition 2.2 — **Fonction racine carrée.** On a

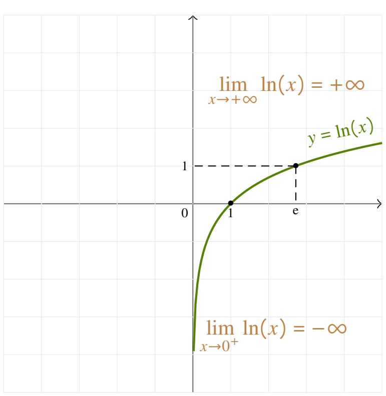
$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

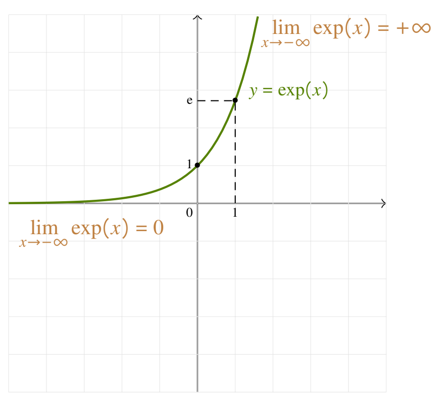


Proposition 2.3 — **Logarithme & Exponentielle.** On a

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$





2.2 Opérations sur les limites

a) Somme

Le tableau suivant donne $\lim f(x)+g(x)$.

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$		$+\infty$	FI
$-\infty$			$-\infty$

Exemple 2.4

$x\mapsto x^2+x$ en $+\infty$	$+\infty$
$x\mapsto e^x+5$ en $-\infty$	5
$x\mapsto x^3+1$ en $+\infty$	$+\infty$
$x\mapsto x^2+x^3$ en $-\infty$	F.I.

b) Produit par un nombre réel

$\lim f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \lambda f(x)$, avec $\lambda>0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \lambda f(x)$, avec $\lambda<0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 2.5

$x\mapsto -3e^x$ en $+\infty$	$-\infty$
$x\mapsto 2\ln(x)$ en $+\infty$	$+\infty$

c) Produit

Le tableau suivant donne $\lim f(x)\times g(x)$.

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$	$\ell'\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell\neq 0$	$\ell\times\ell'$	0	$\mathrm{sgn}(\lambda)\infty$	$-\mathrm{sgn}(\lambda)\infty$
0		0	FI	FI
$+\infty$			$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$				$+\infty$

Exemple 2.6

$x\mapsto\sqrt{x}(2-x)$ en $+\infty$	$-\infty$
$x\mapsto \ln(x)\times e^x$ en 0	$-\infty$
$x\mapsto x^3\times e^x$ en $-\infty$	F.I.

d) Inverse et Quotient

Attention, on ne peut pas déterminer les limites du type « $\frac{*}{0}$ » si on ne connaît pas le **signe du dénominateur**. On se limite donc au cas où le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif (ce que l'on note ici 0^+) ou strictement négatif (ce que l'on note ici 0^-).

$\lim f(x)$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

À partir de ces propriétés, on peut en déduire le comportement suivant pour l'inverse des fonctions puissances.

Proposition 2.7 Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- **Cas n pair :**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

- **Cas n impair :**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

Exemple 2.8

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(x)}=0 \qquad \lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^2}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

On a des propriétés similaires concernant la limite d'un quotient. Le tableau suivant donne $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\operatorname{sgn}(\ell)\infty$	$-\operatorname{sgn}(\ell)\infty$	0	0
0	0	FI	FI	0	0
$+\infty$	$\operatorname{sgn}(\ell)\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$-\infty$	$-\operatorname{sgn}(\ell)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

Exemple 2.9

Limite	Limite num.	Limite dénom.	Résultat
$x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{\ln(x)+x}$ en 0^+	$\lim\limits_{x\to 0} e^{2x}-1=0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)+x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\ln(x)+x}=0$
$x \mapsto \frac{x+3}{x+7}$ en $(-7)^+$	$\lim\limits_{x\to(-7)^+} x+3=-4$	$\lim\limits_{x\to(-7)^+} x+7=0^+$	$\lim\limits_{x\to(-7)^+} \frac{x+3}{x+7}=-\infty$
$x \mapsto \frac{x+2}{(x-2)(x+5)}$ en 2^-	$\lim\limits_{x\to 2^-} x+2=4$	$\lim\limits_{x\to 2^-} (x-2)(x+5)=0^-$	$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+5)}=-\infty$
$x \mapsto \frac{x^2+x-1}{x^2-4}$ en 2^+	$\lim\limits_{x\to 2^+} x^2+x-1=5$	$\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-4=0^+$	$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-1}{x^2-4}=+\infty$
$x \mapsto \frac{x^2+x-1}{x^2-4}$ en 2^-	$\lim\limits_{x\to 2^-} x^2+x-1=5$	$\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-4=0^-$	$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-1}{x^2-4}=-\infty$

e) Composée de limites

Proposition 2.10 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ et g une fonction définie sur J. Soit x_0 un élément de I ou une de ses extrémités.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to X_0} g(X) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell.$$

Ici, x_0, X_0 et ℓ peuvent être des nombres réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 2.11

Limite	Limite "à l'intérieur"	Limite "autour"	Résultat
$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}+25}$ en $+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+25=25$	$\lim\limits_{X\to 25} \sqrt{25}=5$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+25}=5$
$x \mapsto \left(\frac{1}{x}+5\right)^9$ en 0^-	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}+5=-\infty$	$\lim\limits_{X\to-\infty} X^9=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}+5\right)^9=-\infty$
$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^-	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{X\to-\infty} \exp(X)=0$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)=0$
$x \mapsto e^{-2x+3}$ en $-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x+3=+\infty$	$\lim\limits_{X\to+\infty} \exp(X)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+3}=+\infty$
$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ en 1^+	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1}=+\infty$	$\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$

2.3 Résoudre une forme indéterminée

a) Croissances comparées

Proposition 2.12 — Logarithme v.s. puissance. Pour tous $a, b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b |\ln x|^a = 0$$

Proposition 2.13 — Logarithme v.s. exponentielle. Pour tous $a, b > 0$,

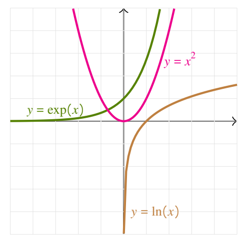
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{(\ln x)^b} = +\infty$$

Proposition 2.14 — Exponentielle v.s. puissance. Pour tous $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^{ax} = 0$$

? On peut résumer de manière informelle en disant que

logarithme << puissances << exponentielle



Exemple 2.15

Limite	Forme indéterminée	Terme "le plus fort"	Résultat
$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\ln(x)$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
$x \mapsto x\ln(x)$ en 0^+	$0 \times \infty$	x	$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
$x \mapsto \frac{e^x}{x^2\sqrt{x}}$ en $+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	e^x	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\sqrt{x}} = +\infty$
$x \mapsto \frac{x^2\ln(x)}{x-1}$ en 0^+	$0 \times \infty$	$\frac{x^2}{x-1}$	$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\ln(x)}{x-1} = 0$
$x \mapsto e^{x\ln(x)}$ en 0^+	$0 \times \infty$	e^x	$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1$

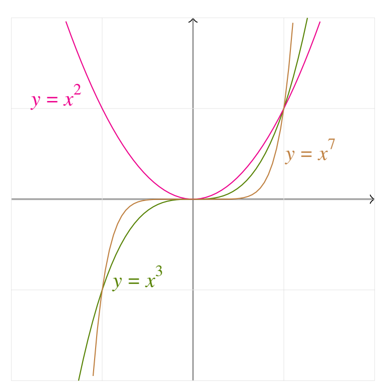
b) Factorisation par le terme le "plus fort"

Comme pour les suites, pour résoudre une forme indéterminée, on peut factoriser par le terme le plus fort.

? Pour aller plus vite, on peut se souvenir que our les limites en $\pm\infty$:

- La limite d'une fonction polynomiale correspond à la limite du terme de plus haut degré.
- La limite d'une fraction rationnelle correspond à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Attention, ceci n'est pas un résultat officiel : il faut le re-démontrer à chaque fois, mais il est bon de le garder en tête pour ne pas se tromper.



Limite	F.I.	Factorisation	Bloc 1	Bloc 2	Bloc 3	Résultat
$x \mapsto x^3 + 2x^2$ en $-\infty$	$+\infty - \infty$	$\forall x > 0,\ x^3 + 2x^2 = x^3\left(1 + \frac{2}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$		$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + 2x^2 = -\infty$
$x \mapsto \frac{3x^2-3x}{2x+3}$ en $+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\forall x > 0,\ \frac{3x^2-3x}{2x+3} = \frac{3x^2\left(1-\frac{3x}{3x^2}\right)}{2x\left(1+\frac{3}{2x}\right)}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{2x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3x}{3x^2} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{2x} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x}{2x+3} = +\infty$
$x \mapsto \frac{2x^3+1}{x^6+1}$ en $-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\forall x < 0,\ \frac{2x^3+1}{x^6+1} = \frac{2x^3\left(1+\frac{1}{2x^3}\right)}{x^6\left(1+\frac{1}{x^6}\right)}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^6} = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{2x^3} = 1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x^6} = 1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+1}{x^6+1} = 0$
$x \mapsto x - x\ln(x)$ en $+\infty$	$+\infty - \infty$	$\forall x > 0,\ x - x\ln(x) = x(1 - \ln(x))$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} x - x\ln(x) = -\infty$
$x \mapsto xe^x - x$ en $+\infty$	$+\infty - \infty$	$\forall x \in \mathbb{R},\ xe^x - x = e^x\left(x - xe^{-x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x - xe^{-x} = +\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x - x = +\infty$
$x \mapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$ en $+\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{e^x\left(1-e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = +\infty$
$x \mapsto xe^{2x} - 3e^x$ en $+\infty$	$+\infty - \infty$	$\forall x \in \mathbb{R},\ xe^{2x} - 3e^x = e^{2x}\left(x - 3e^{-x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x - 3e^{-x} = +\infty$		$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{2x} - 3e^x = +\infty$

Exemple 2.16 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x+x}{\ln(x)+x^2}$.

Gestes Invisibles/Automatismes. On commencer par évaluer la limite "à l'oeil" pour comprendre si on est face à une FI ou pas. On a

$$\lim_{x\to\infty} e^x + x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln(x) + x^2 = +\infty$$

Donc, on est face à une FI de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On a,

$$\forall x > 0, \qquad \frac{e^x + x}{\ln(x) + x^2} = \frac{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{\frac{\ln(x)}{x^2} + 1}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = 1 \text{ par c.c.} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} + 1 = 1 \text{ par c.c.} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ par c.c.}$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{\ln(x) + x^2} = +\infty$$

c) Limite en un point fini

Lorsque l'on étudie une limite en un nombre réel a différent de 0 et que l'on tombe sur une forme indéterminée, il faut factoriser en haut et en bas par $x-a$ puis simplifier pour faire disparaître la forme indéterminée.

Limite	Factorisation	Résultat
$x \mapsto \frac{x^2-0^2}{x-0}$ en 0	$\forall x \in [-1,1],\ \frac{x^2-0^2}{x-0} = \frac{x\times x}{x\times 1} = x$	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-0^2}{x-0} = 0$
$x \mapsto \frac{x+1}{x^2-1}$ en -1	$\forall x \in [-2,0],\ \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)\times 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$	$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$
$x \mapsto \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ en 2	$\forall x \in [1,3],\ \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+2}{x+5}$	$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \frac{4}{7}$
$x \mapsto \frac{x^2-a^2}{x-a}$ en a	$\forall x \neq a,\ \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a$	$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a$

d) Changement de variables

Pour simplifier l'écriture d'une limite, on peut aussi effectuer un changement de variables.

Limite	Chg. Variable	Nvlle Limite	Résultat
$x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en 0^+	$u = \frac{1}{x}$	$u \mapsto \frac{\mathrm{e}^u}{u}$ en $+\infty$	$\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$
$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$ en $+\infty$	$u = x^2$	$u \mapsto \frac{\mathrm{e}^u}{\sqrt{u}}$ en $+\infty$	$\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$

e) Utiliser la quantité conjuguée

Exemple 2.17 Déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x-1}.$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On commencer par évaluer la limite “à l'oeil” pour comprendre si on est face à une FI ou pas. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$$

Donc, on est face à une FI de la forme « $+\infty - \infty$ ».

Pour résoudre cette forme indéterminée, on va utiliser la quantité conjuguée. On a

$$\begin{aligned}
\forall x \geqslant 1, \qquad \sqrt{x} - \sqrt{x-1} &= (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x-(x-1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = 0.$$

3 Théorèmes concernant les limites

3.1 Passage à la limite dans une inégalité

Proposition 3.1 — **Passage à la limite dans une inégalité.** Soient f et g deux fonctions définies sur I contenant x_0. On suppose que
(H1) Pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant g(x)$
(H2) La fonction f admet une limite finie ℓ_f en a
(H3) La fonction g admet une limite finie ℓ_g en a
Alors,

$$\ell_f \leqslant \ell_g$$

! Les inégalités concernant les limites sont toujours larges ! Par exemple,

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{mais} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ngtr 0.$$

Exemple 3.2 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(g(x)).$$

Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, que doit nécessairement vérifier ℓ ?

(H1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 0$ par propriété de l'exponentielle.
(H2) Or, d'après l'énoncé, on suppose que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

(H3) Mais aussi,

$$\lim_{x \to +\infty} 0 = 0$$

Donc *en passant à la limite dans l'inégalité*, on obtient que

$$\ell \geqslant 0$$

3.2 Existence de limite par encadrement

Proposition 3.3 — Théorème des gendarmes. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I à valeurs réelles. On suppose que

(H1) Pour tout $x \in I$, on a $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

(H2) On a $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(H3) On a $\lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Exemple 3.4 Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1.$$

(H1) Par définition de la partie entière, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Donc

$$\forall x \neq 0, \qquad 1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$$

(H2) Or

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

(H3) Mais aussi,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Donc, par *théorème d'encadrement*,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1.$$

Exemple 3.5 Soit s une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant s(x) \leqslant 1$. Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, \quad f(x) = \frac{3 - s(x)}{x - 3}.$$

Déterminer, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.

(H1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, on a

$$-1 \leqslant s(x) \leqslant 1.$$

Donc

$$2 \leqslant 3 - s(x) \leqslant 4.$$

Donc, pour tout $x > 3$, en multipliant l'inégalité précédente par $\frac{1}{x-3} > 0$, on obtient

$$\frac{2}{x-3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{4}{x-3}.$$

(H2) Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-3} = 0.$$

(H3) Mais aussi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x-3} = 0.$$

Donc, par *théorème des gendarmes*, la fonction f admet une limite en $+\infty$ et sa limite vaut

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Proposition 3.6 — Théorème des gandarmes, cas particulier. Soient f et ε deux fonctions définies sur I à valeurs réelles. On suppose que

(H1) Pour tout $x \in I$, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)$.

(H2) On a $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Alors,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Exemple 3.7 Soient ε une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est bornée. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) \times \varepsilon(x).$$

Déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.

(H1) Comme la fonction g est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \leqslant M.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = |g(x)| \times |\varepsilon(x)| \leqslant M|\varepsilon(x)|.$$

(H2) Or la fonction ε tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc par composition avec la valeur absolue et par produit,

$$\lim_{x\to 0} M|\varepsilon(x)| = 0.$$

Donc, par *théorème des gendarmes*, f admet une limite en 0 donnée par

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Proposition 3.8 — Théorème d'existence de limite valant $\pm\infty$ par minoration. Soient f et g deux fonctions définies sur I (contenant a) à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.9 Déterminer, si elles existent, les limites de la fonction partie entière en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour tout réel x, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$

1. En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor.$$

Or

$$\lim_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty.$$

Donc par minoration,

$$\lim_{x\to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

2. En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Or

$$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty.$$

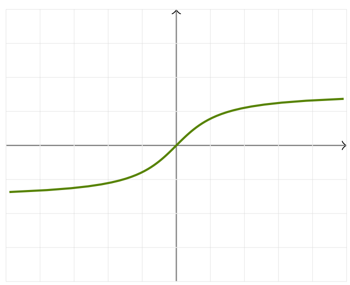
Donc par majoration,

$$\lim_{x\to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

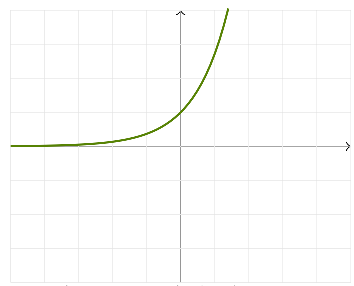
3.3 Fonctions monotones

Proposition 3.10 — **Théorème de la limite monotone.** Soit f une fonction monotone sur l'intervalle **ouvert** $I =]a, b[$ (avec $a < b$, éventuellement infinis). Alors, f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b. Plus précisément,

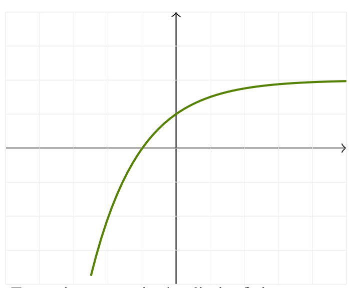
	f croissante	f décroissante
f majorée	limite finie en b	limite finie en a
f non majorée	diverge en $+\infty$ en b	diverge vers $+\infty$ en a
f minorée	limite finie en a	limite finie en b
f non minorée	diverge en $-\infty$ en a	diverge en $-\infty$ en b



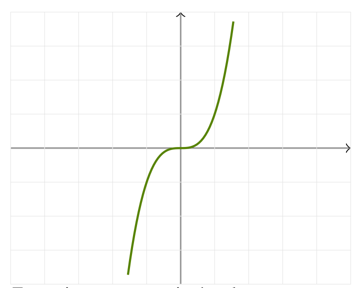
- Fct croissante majorée : limite finie en $+\infty$
- Fct croissante minorée : limite finie en $-\infty$



- Fct croissante non majorée : dv vers $+\infty$ en $+\infty$
- Fct croissante minorée : limite finie en $-\infty$



- Fct croissante majorée : limite finie en $+\infty$
- Fct croissante non minorée : dv vers $-\infty$ en $-\infty$



- Fct croissante non majorée : dv vers $+\infty$ en $+\infty$
- Fct croissante non minorée : dv vers $-\infty$ en $-\infty$

Exemple 3.11 Soient f une fonction décroissance définie sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Comme f est une fonction décroissante, par le théorème de la limite monotone, deux cas sont possibles.

- Premier cas : La fonction f est minorée et elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Alors, comme $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$, par somme de limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

- Deuxième cas : La fonction f n'est pas minorée, et elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Alors, comme $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$, par somme de limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

Dans les deux cas, on obtient le résultat souhaité.