TD 11 – LIMITES DE FONCTION

Exercice 1 – Calculs de limite, sans FI.

1) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{x^3} \left(= \frac{1}{(-2)^3}\right) = -\frac{1}{8}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3} \left(= \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^3} \left(= \frac{1}{0^-}\right) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{9}{x\sqrt{x}} \left(= \frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^5 + \frac{6}{x} + 13 (= -(-\infty) + 0) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{x^2+x+1} \left(= \sqrt{1^2+1+1}\right) = \sqrt{3}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} (= \sqrt{+\infty}) = +\infty$

8) $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{3x^2+2x+1}{x-2} \left(= \frac{17}{0^+}\right) = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{-2x-5}{\sqrt{x-3}} \left(= -\frac{11}{0^+}\right) = -\infty$

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}(1+\sqrt{x}) \left(= \frac{1}{0^+} \times +\infty\right) = +\infty$

Exercice 2 – Calculs de limite, avec FI.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4} = +\infty$ par croissances comparées

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3+x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to 0} x \times \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+3x-\frac{1}{4x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3+13x^2+3x-1}{4x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \times \frac{1+\frac{13}{4x}+\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4x^3}}{1+\frac{1}{4x}} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1} \left(=\frac{0}{1}\right) = 0$ par croissances comparées

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-x+1}{x+\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{1-xe^{-x}+e^{-x}}{1+\frac{\ln x}{x}} \left(= +\infty \times \frac{1-0+0}{1+0}\right) = +\infty$ par croissances comparées $\times 3$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} (6+x^2)e^x = 0$ par croissances comparées

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-e^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(x^3e^{-2x}-1) = -\infty$

Exercice 3 – Calculs de limites.

1) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{u\to 0^+} (u+2)u\ln(u) = 0$ par croissances comparées

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition car $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+3-1}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) - \ln(x+4) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right) = 0$ par comp. car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x+4} = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 0$ par comp. car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3+x^2} = +\infty$ par composition car $\lim\limits_{x\to +\infty} 3+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} e^X = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{\exp(u)}{\sqrt{u}} = 0$

Exercice 4 – Limite classique (par encadrement).

1. Démontrer l'encadrement suivant,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+x\mathrm{e}^x$$

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1+x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \end{array}$$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = x\mathrm{e}^x$$

On en déduit donc le tableau de variations de f de la manière suivante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x \leqslant 1+x\mathrm{e}^x$$

La seconde inégalité s'obtient de même.

2. En déduire la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

De la question précédente, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x$$

Donc,

$$\forall x > 0, \qquad 1 \leqslant \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \leqslant \mathrm{e}^x$$

et de même,

$$\forall x < 0, \qquad 1 \geqslant \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \geqslant \mathrm{e}^x$$

(car la multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité). Or

$$\lim_{x\to 0} 1 = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1.$$

Donc, par *théorème d'encadrement*, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.$$

Exercice 5 – Limite classique (par encadrement).

1. Démontrer l'encadrement suivant,
$$\forall x > -1, \qquad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

   Faire comme dans l'Exercice 4.

2. En déduire la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$.

   En faisant comme dans l'Exercice 4, on en déduit que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

3. En déduire les limites suivantes
$$x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ en } +\infty \qquad \text{et} \qquad x \mapsto (1+x)^{\ln(x)} \text{ en } 0^+$$

   Pour calculer ses limites, on passera par la forme exponentielle.

   - Pour tout $x > 1$, on a
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$
     Or,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 1} \exp(u) = \mathrm{e}$$
     Donc, par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$
   - Pour tout $x > 1$, on a
$$(1+x)^{\ln(x)} = \exp(\ln(x)\ln(1+x)) = \exp\left(x\ln(x) \times \frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$
     Or,
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par c.c.} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 0} \exp(u) = 1$$
     Donc, par composition,
$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)} = 1$$

Exercice 6 – Des limites, encore... Déterminer les limites suivantes.

1) $x \mapsto (\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$ en 0 2) $x \mapsto (\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

En passant par la forme exponentielle, on obtient,

$$\lim_{x\to 0}(\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Exercice 7 – Fonctions définies par morceaux. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \begin{cases} e^{x\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

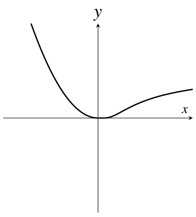
1. Déterminer si la fonction f admet une limite en 0.

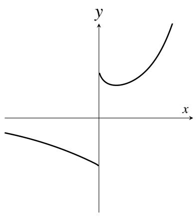
   - Étude de la limite en 0^+. Pour tout $x > 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Donc,
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$
   par composition, car
   $$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to -\infty} e^X = 0.$$
   - Étude de la limite en 0^-. Pour tout $x < 0$, $f(x) = x^2$. Donc,
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$$
   - Conclusion. La fonction f admet une limite en 0^+, une limite en 0^- et ces deux limites sont égales donc elle admet une limite en 0 donnée par
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

2. Déterminer si la fonction g admet une limite en 0. *On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 4.*

   - Étude de la limite en 0^+. Pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{x\ln(x)}$. Donc,
   $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1$$
   par composition, car
   $$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par c.c.} \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to 0} e^X = e^0 = 1.$$
   - Étude de la limite en 0^-. Pour tout $x < 0$, $g(x) = \frac{xe^x}{1-e^x}$. Donc,
   $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \times \frac{x}{1-e^x} = -1$$
   car, d'après l'Exercice 4, on a,
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
   - Conclusion. La fonction g admet une limite en 0^+, une limite en 0^-. Cependant, ces deux limites sont différentes donc la fonction g n'admet pas de limite en 0.

3. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, déterminer celle représentative de la fonction f et celle représentative de la fonction g.





La figure de gauche représente la courbe de la fonction f et la figure de droite celle de g.

Exercice 8 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = \ln(x) \times \ln(\ln(x)).$$

1. Déterminer son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.

   La quantité $f(x)$ est bien définie si et seulement si

   $$x > 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(x),$$

   c'est-à-dire, par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$,

   $$x > 0 \qquad \text{et} \qquad x > 1.$$

   Donc $\mathscr{D}_f =]1, +\infty[$.

2. Déterminer les limites de f aux extrémités de $\mathscr{D}_f$.

   - Limite en 1. À première vue, on est face à une forme indéterminée de la forme $0 \times \infty$. On va se ramener à une croissance comparée pour résoudre cette forme indéterminée. En posant $X = \ln(x)$, on obtient

     $$\lim_{x \to 1^+} \ln(x) \times \ln(\ln(x)) = \lim_{X \to 0} X \ln(X) = 0 \qquad \text{par croissances comparées.}$$

     Donc, la fonction f tend vers 0 quand x tend vers 1.
   - Limite en $+\infty$. On peut la déterminer directement sans croissance comparée. On a

     $$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = +\infty \ \text{ et } \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \to \infty} \ln(\ln(x)) = +\infty.$$

     Enfin, par produit, on obtient que

     $$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 9 – Étude de fonctions. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer : son ensemble de définition, sa parité, ses limites aux bornes de son ensemble de définition, son tableau de variations et tracer l'allure de la courbe.

$$x \mapsto \ln\left(\tfrac{x+1}{x-1}\right) \qquad x \mapsto \ln(x^2+1) - x$$

$$x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x} \qquad x \mapsto \tfrac{x^2+1}{x^2-1}$$

Correction pour la première fonction. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

- La quantité $f(x)$ est bien définie lorsque
$$\frac{x+1}{x-1} > 0.$$
Pour déterminer l'ensemble des réels x vérifiant cette condition, on trace le tableau de signe de la quantité considérée.

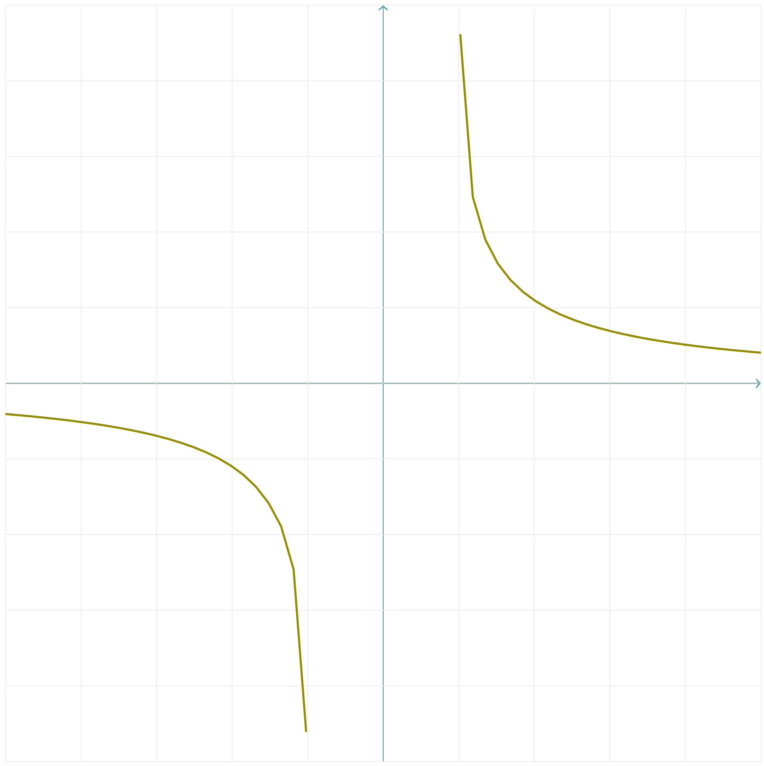
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On en déduit que
$$\mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

- Tout d'abord, le domaine de définition de f est symétrique par rapport à zéro donc on peut étudier la parité de f. Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On a
$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -f(x).$$
Donc f est impaire.
- – Étude de la limite en $+\infty$. On a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to 1} \ln(X) = 0.$$
Donc par composition,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$
  – Étude de la limite en 1. On a
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty.$$
Donc par composition,
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$
  – Étude de la limite en -1. Comme f est impaire, on a
$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$
  – Étude de la limite en $-\infty$. Comme f est impaire, on a
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
- La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f'(x) = \frac{2}{(1-x)(x+1)}$$
On peut en déduire le tableau de signe suivant pour f' et donc le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$			0	$-$	
$x+1$		$-$	0			$+$	
$f'(x)$		$-$	$\parallel$		$\parallel$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \parallel$		$\parallel +\infty$	$\searrow$	0

- On peut alors tracer l'allure de la courbe.



■

Exercice 10 – Calcul de limite par encadrement. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geqslant 4, \qquad \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

(H1) D'après l'énoncé, on sait que

$$\forall x \geqslant 4, \qquad \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

(H2) Or,

$$\forall x \geqslant 4, \qquad \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{2}.$$

De plus,

$$\lim_{X\to\sqrt{2}} \ln(X) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Donc, par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \ln(2).$$

(H3) Puis,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(2) = \ln(2).$$

Donc, par *théorème d'encadrement*,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$$

Exercice 11 – Calcul de limite par minoration.

1. Démontrer l'encadrement suivant,
$$\forall x \geqslant 0, \qquad e^x \geqslant x^2$$
Il s'agit de dresser le tableau de variations de la fonction $x \mapsto e^x - x^2$ et d'en déduire que la fonction est positive sur $[0, +\infty[$.

2. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$.
De la question précédente, on déduit que,
$$\forall x > 0, \qquad \frac{e^x}{x} \leqslant x.$$
Or
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$
Donc, par minoration,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Exercice 12 – Théorème de la limite monotone - Illustrations. Tracer l'allure d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants,

1. Fonction croissante majorée et minorée
2. Fonction croissante majorée et non minorée
3. Fonction croissante non majorée et minorée
4. Fonction croissante non majorée et non minorée
5. Fonction décroissante majorée et minorée
6. Fonction décroissante majorée et non minorée
7. Fonction décroissante non majorée et minorée
8. Fonction décroissante non majorée et non minorée

et indiquer ce que cela implique sur les limites en $\pm\infty$.

Exercice 13 – Théorème de la limite monotone. Soient f une fonction décroissance définie sur $\mathbb{R}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x.$$

Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$$

Pour la démonstration de la limite

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

voir le poly de cours. Montrons que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

- Soit la fonction f est majorée, et comme elle est décroissante, alors elle admet une limite finie en $-\infty$. Dans ce cas, par opérations,
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - x = +\infty.$$
- Soit la fonction f n'est pas majorée, et comme elle est décroissante, alors elle diverge vers $+\infty$ en $-\infty$. Dans ce cas, par opérations,
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - x = +\infty.$$

Exercice 14 – Théorème de la limite monotone. Soit f une fonction croissante sur $]0,1[$. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la fonction f admet une limite finie ℓ à droite en a qui vérifie $\ell \geqslant f(a)$.

Soit $a \in]0,1[$. Comme la fonction f est croissante,

$$\forall x > a, \qquad f(x) \geqslant f(a).$$

Donc la fonction f est croissante sur $]a,1[$ et elle est minorée, donc par théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en sa borne de gauche, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie en a^+ que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient,

$$\ell \geqslant f(a).$$

Exercice 15 – Étude de fonction. Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

$$\mathscr{D}_f =]0,+\infty[\setminus\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$$

2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^-.

   On peut montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$$

3. Déterminer la limite de $u\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$ quand $u \to 0^+$.

   En faisant un changement de variables, on obtient,

$$\lim_{u\to 0^+} u\mathrm{e}^{\frac{1}{u}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

4. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^+$. *On utilisera le fait que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x-1$.*

   Soit $x > 1$. On a,

$$\begin{array}{lll} & \ln(x) \leqslant x-1 & \\ \text{donc} & \frac{1}{\ln(x)} \leqslant \frac{1}{x-1} & \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0,+\infty[\\ \text{donc} & \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) \geqslant \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{car } x \mapsto \exp(x) \text{ croissante sur }]0,+\infty[\\ \text{donc} & f(x) \geqslant (x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{car } x-1>0 \end{array}$$

   Donc, on a montré que

$$\forall x > 1, \qquad f(x) \geqslant (x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

   Or, en faisant un changement de variables et en utilisant la question précédente,

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 0^+} u\exp\left(\frac{1}{u}\right) = +\infty.$$

   Donc, par *minoration*, on a,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Exercice 16 – Asymptote oblique. Soit une fonction telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$ lors que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la fonction f suivante

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + \mathrm{e}^x}{x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. On notera a le réel obtenu.

   $a = 1$

4. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x) - ax$. On notera b le réel obtenu.

   $b = -1$

5. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

   La droite $y = x - 1$ est une asymptote oblique.

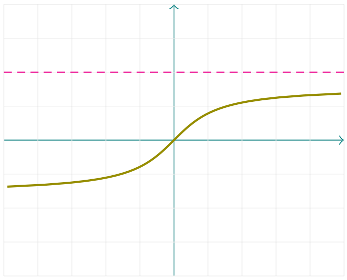
Exercice 17 – Vrai ou Faux ?. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsque l'assertion est fausse, donner un contre-exemple (on pourra se contenter d'un graphe).

1. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) - a = 0$.

   VRAI

2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors elle tend vers 1 en $+\infty$.

   FAUX. Une fonction peut être croissante, majorée par 2 et tendre vers 1 en $+\infty$ par exemple.



3. Si $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x)$ alors $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

   FAUX. Par exemple,
   $$\lim_{x\to 2}(x-2) = \lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$$
   Pourtant, la fonction
   $$x \mapsto \frac{(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$$
   n'admet même pas de limite en 2 car
   $$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \qquad \text{alors que} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

4. $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$

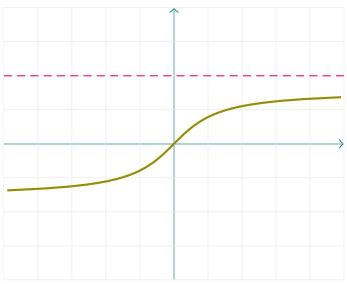
   VRAI

5. $\lim_{x\to a} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 1$

   FAUX. Par exemple,
   $$\lim_{x\to 1} |-x| = 1$$
   Alors que
   $$\lim_{x\to 1} -x = -1$$

6. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

   FAUX. Si la fonction est strictement croissante et majorée, alors elle va admettre une limite finie.



7. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle tend vers 5 en $+\infty$ alors f est majorée par 5.

   VRAI

8. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et que g tend vers 0 en $+\infty$ alors f tend vers 0 en $+\infty$.

FAUX. Par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -x^2 \leqslant 0$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0.$$

Pourtant,

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$$

9. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, alors soit elle admet une limite finie en $+\infty$, soit elle diverge vers $+\infty$.

FAUX. Une fonction peut aussi ne pas admettre de limites (phénomène d'oscillations).