

Chapitre 12 : Applications

1 Application, antécédent, image

Définition 1.1 Soient E et F deux ensembles. Une **application** d'un ensemble E dans un ensemble F est un objet qui, à tout élément x de E associe un unique élément y de F que l'on note $f(x)$. On note alors

$$f : E \longrightarrow F$$

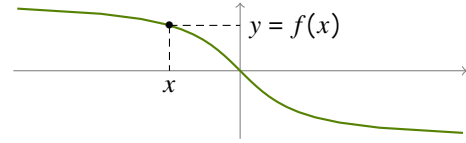
$$x \longmapsto f(x)$$

- E est appelé l'**ensemble de définition** de f , i.e.

$$\forall x \in E, f(x) \text{ existe}$$

- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f , i.e.

$$\forall x \in E, f(x) \in F$$



Si $y = f(x)$ avec $x \in E$, on dit que

- x est un **antécédent** de y
- et que y est l'**image** de x par f .

Une application correspond donc à la donnée de trois éléments : un ensemble de départ E , un ensemble d'arrivée F et une expression f .

Exemple 1.2

Application	Ensemble de définition	Ensemble d'arrivée
$f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto \sqrt{x-2}$		
$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $k \longmapsto k^2 + 3$		
$h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto (\ln(x))^2$		
$j_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto x^2$		
$j_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto x^2$		
$j_3 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto x^2$		

Exemple 1.3 Reprenons les fonctions de l'Exemple 1.2.

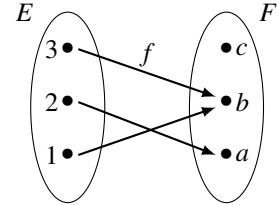
	Antécédent	Image
$f(2) = 0$		
$g(2) = 7$		
$g(-2) = g(2) = 7$		

1.1 Comment représenter une application ?

On peut représenter une application de deux manières :

- Sous forme de diagrammes fléchés (lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont de cardinal fini)
- En représentant son graphe dans le plan muni $\mathbb{R}^2$ d'un repère.

Exemple 1.4 Soit $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ l'application f représentée ci-contre.



- L'ensemble de définition de f est _____
 - L'ensemble d'arrivée de f est _____
 - L'image de 2 par f est _____
 - L'élément b admet _____
-
- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?
-
- L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?
-
- Quel est l'*image* de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?

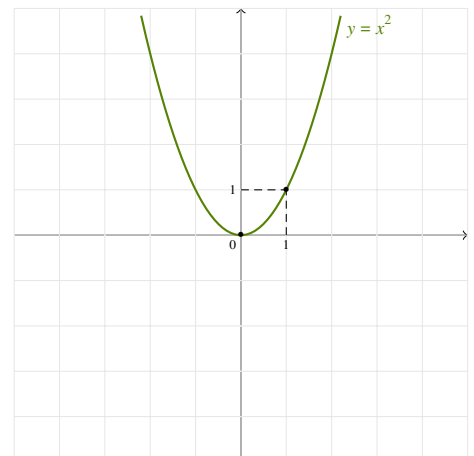
Exemple 1.5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application suivante.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

- L'ensemble de définition de f est _____
- L'ensemble d'arrivée de f est _____
- L'image de 1 par f est _____
- L'élément 4 a _____



- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?

- L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?
- Quel est l'*image* de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?

1.2 Comment montrer que deux applications sont égales ?

Proposition 1.6 Deux applications f et g sont égales si

- elles ont le même ensemble de départ E ,
- elles ont le même ensemble d'arrivée F ,
- et elles ont la même expression :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$



Ainsi, les fonctions

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} g : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas les mêmes, alors qu'elles ont la même expression. Par exemple, on a le droit de considérer l'objet mathématique $f(2)$ alors qu'on a pas le droit de considérer $g(2)$ (bien qu'on pourrait très facilement lui donner un sens...).

Exemple 1.7 Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

Montrer que les deux applications sont égales.

1.3 Comment déterminer l'image d'un élément ?

❓ Pour déterminer l'image d'un élément $x \in E$ par l'application f , il faut calculer $f(x)$.

Exemple 1.8 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Calculer l'image de l'élément 4 par l'application f .

Exemple 1.9 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - y, 3x - 2y) \end{aligned}$$

Calculer l'image de l'élément $(1, 3)$ par l'application f .

1.4 Comment déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément ?

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

❓ Pour déterminer les antécédents d'un élément $y \in F$ par l'application f , il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x . L'ensemble des solutions de cette équation correspond à l'ensemble des antécédents de y par f .

Exemple 1.10 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Calculer l'antécédent de 36 par f .

Exemple 1.11 On considère l'application

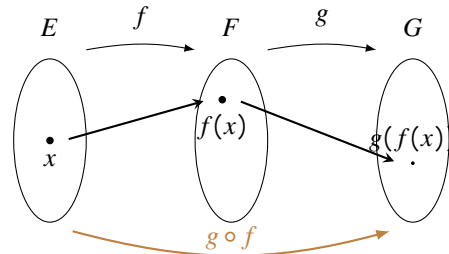
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - y, 3x - 2y) \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des antécédents de l'élément $(0, 1)$ par l'application f .

2 Composition de deux applications

Définition 2.1 Soient E , F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. La composée $g \circ f$ est l'application définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$



⚠ Avec les notations ci-dessus, $g \circ f$ est bien définie mais pas forcément $f \circ g$. De plus, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, en générale, ces deux applications ne sont pas égales.

Proposition 2.2 Soient E , F et G quatre ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$. Alors,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Exemple 2.3 On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* & \text{et} & & g : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} & & & x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

Exemple 2.4 On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 & & & x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

3 Image directe d'une application

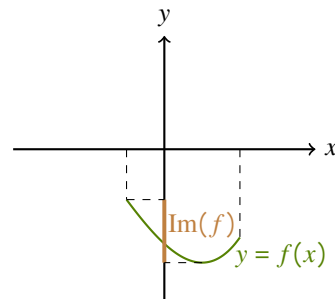
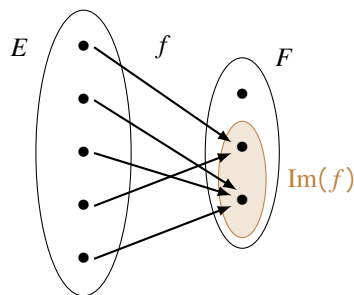
Définition 3.1 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle **image directe** de f , et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble suivant

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

L'image de f correspond à l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f . On a donc la caractérisation suivante :

$$y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in E, y = f(x).$$

C'est une partie de F , c'est-à-dire $\text{Im}(f) \subset F$.



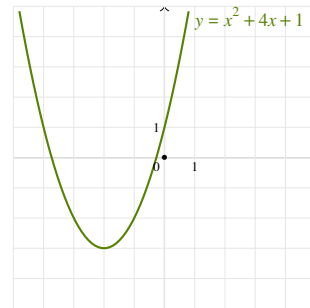
? Pour déterminer l'**image** d'une application $f : E \rightarrow F$, on dispose de plusieurs méthodes.

1. Si E et F sont des sous-parties de $\mathbb{R}$, on peut tracer le tableau de variation de la fonction pour visualiser l'ensemble des valeurs prises par la fonction.
2. Pour montrer que $\text{Im}(f)$ est un ensemble donné, on peut procéder par double-inclusion.

Exemple 3.2 — Avec la méthode 1.

Déterminer l'image de l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$



Exemple 3.3 — Avec la méthode 2.

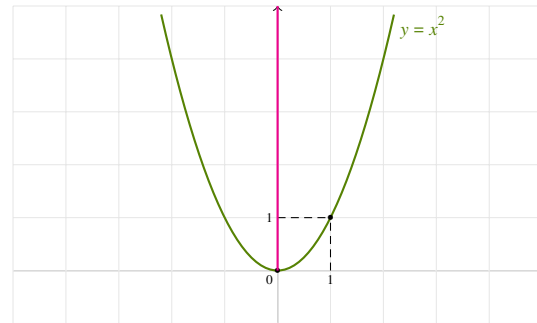
On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

Montrer que l'image de f est donné par

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty[$$



Exemple 3.4 — Avec la méthode 2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, -3x + 3y) \end{aligned}$$

Montrer que

$$\text{Im}(f) = \{(a, -3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Notons F l'ensemble de droite.

- Montrons que $\text{Im}(f) \subset F$.

Soit $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$. Montrons que $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

- *Ce que l'on sait.* Comme $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$, on sait que

$$\exists \underline{\hspace{2cm}} \in \underline{\hspace{2cm}}, (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (\text{Info})$$

- *Ce que l'on veut montrer.* Pour montrer que $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$, il s'agit de montrer que

$$b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

En utilisant l'expression de l'application f et (Info), on obtient que

$$\begin{cases} a = \underline{\hspace{2cm}} \\ b = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Et donc

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

Donc $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

Donc $\underline{\hspace{2cm}} \subset \underline{\hspace{2cm}}$.

- Montrons que $F \subset \text{Im}(f)$.

Soit $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$. Montrons que $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

- *Ce que l'on sait.* Comme $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$, on sait que

$$b = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (\text{Info})$$

- *Ce que l'on veut montrer.* Pour montrer que $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$, il s'agit de montrer que

$$\exists \underline{\hspace{2cm}} \in \underline{\hspace{2cm}}, (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Posons $x = \underline{\hspace{2cm}}$ et $y = \underline{\hspace{2cm}}$. Alors

$$f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$$

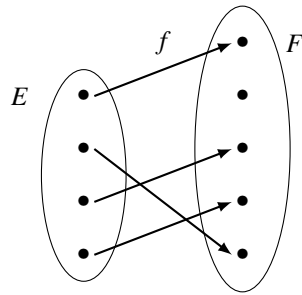
Donc $(a, b) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

Donc _____ C _____ .

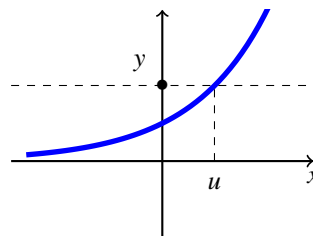
4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

4.1 Injectivité

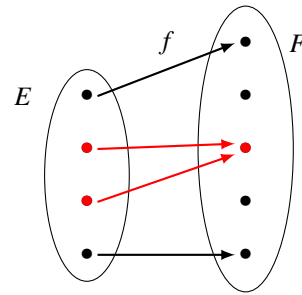
Définition 4.1 On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E par f



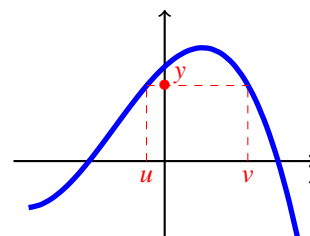
Injective



Injective



Non injective



Non injective

Proposition 4.2 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'application $f : E \rightarrow F$ est injective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au plus une solution dans E .
3. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.
4. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$, c'est-à-dire deux éléments distincts n'ont pas la même image par f .

Proposition 4.3 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. L'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective s'il existe deux éléments distincts de E , x et y tels que $f(x) = f(y)$.

? Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est **injective**, voici la rédaction habituelle.

Soient x et y des éléments de E quelconques.

Supposons que $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $x = y$. Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est injective.

Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ n'est **pas injective**, voici la rédaction habituelle.

Soient $x = \text{*donner valeur*}$ et $y = \text{*donner valeur*}$.

D'une part, $x \neq y$.

D'autre part, $f(x) = f(y)$ car **insérer raisonnement mathématique**.

Donc l'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective.

Exemple 4.4 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective.

Exemple 4.5 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - 3y, x + 2y) \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective.

Exemple 4.6 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas injective.

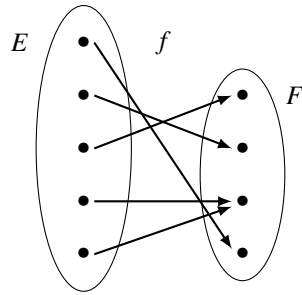
Exemple 4.7 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

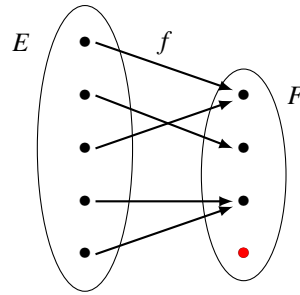
Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est injective.

4.2 Surjectivité

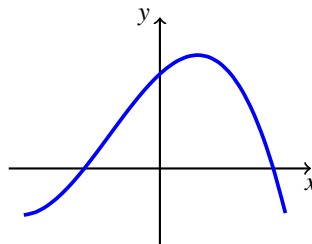
Définition 4.8 On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent dans E par f .



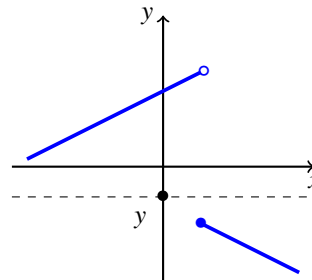
Surjective



Non surjective



Surjective



Non surjective

Proposition 4.9 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \rightarrow F$ est surjective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.
3. Pour tout élément y de F , il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.
4. $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 4.10 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. L'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas surjective s'il existe un élément $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent par f .

? Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est **surjective**, voici la rédaction habituelle.

Soit y un élément de F quelconque.

Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc $y = f(x)$ avec $x \in E$. Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est surjective.

Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ n'est **pas surjective**, voici la rédaction habituelle.

Soit $y = \text{*donner valeur*}$.

Montrons que y n'admet pas d'antécédent par f , c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet pas de solution.

Insérer raisonnement mathématique

Donc l'application $f : E \rightarrow F$ n'est pas surjective.

Exemple 4.11 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective.

Exemple 4.12 On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, x - z) \end{aligned}$$

Montrons que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est surjective.

Exemple 4.13 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

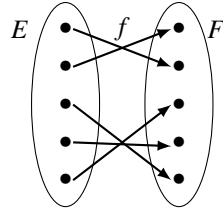
Exemple 4.14 On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

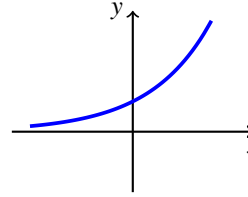
Montrons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est surjective.

4.3 Bijektivité

Définition 4.15 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est **bijective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent dans E par f .



Bijective



Bijective

Proposition 4.16 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \rightarrow F$ est bijective.
2. Pour tout élément y de F , il existe un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.
3. L'application $f : E \rightarrow F$ est injective et surjective.

Proposition 4.17 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. L'application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } x \in E, g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \text{pour tout } y \in F, f(g(y)) = y.$$

Dans ce cas, l'application g est unique. Elle est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1} .

Exemple 4.18 La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont bijectives et sont des bijections réciproques l'une de l'autre car

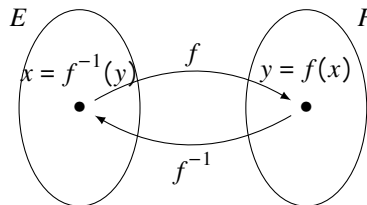
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp(\ln(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \ln(\exp(y)) = y.$$

Proposition 4.19 Soit $f : E \rightarrow F$ bijective. Alors, la bijection réciproque est l'application qui, à un élément y de F , associe l'unique antécédent de y par f dans E , noté x ,

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto x \text{ tel que } y = f(x) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a

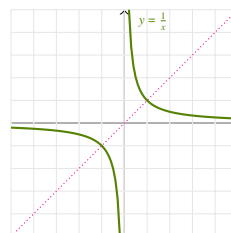
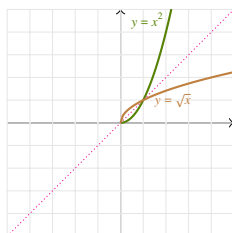
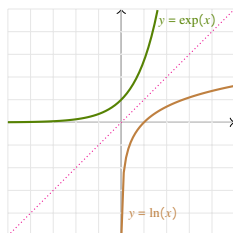
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$



Proposition 4.20 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux bijections. Alors

1. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est une bijection.
2. Et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition 4.21 Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow F$ bijective. Alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



?

Pour démontrer que $f : E \rightarrow F$ est **bijective**, on dispose de plusieurs méthodes.

1. On donne directement l'expression d'une fonction g telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Soit $x \in E$. Montrons que $g(f(x)) = x$.

Insérer raisonnement mathématique

Soit $y \in F$. Montrons que $f(g(y)) = y$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc, $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

2. On montre que, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet une unique solution. Dans ce cas, f est bijective et on obtient aussi l'expression de f^{-1} . Dans ce cas, voici la rédaction habituelle.

Soit y un élément de F quelconque.

Montrons qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est bijective et pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$.

3. On montre que $f : E \rightarrow F$ est injective et surjective à l'aide des méthodes expliquées précédemment. Dans ce cas, f est bijective mais on n'obtient pas l'expression de f^{-1} .

Exemple 4.22 — Avec la méthode 1. On considère les applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} & \text{et} & & g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ k &\longmapsto k + 1 & & & n &\longmapsto n - 1 \end{aligned}$$

Montrons que l'application f est bijective, de bijection réciproque donnée par g .

Exemple 4.23 — Avec la méthode 2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

Exemple 4.24 — Avec la méthode 3. On considère l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrons que l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ est bijective.