DEVOIR MAISON 4

- ***Obligatoire**. À rendre pour le vendredi 9 janvier 2026.*
- *Les résultats finaux doivent être **encadrés.***

Exercice 1 – Soit une fonction telle que $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$ lors que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la fonction f suivante

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + \mathrm{e}^x}{x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. On notera a le réel obtenu.
4. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto f(x) - ax$. On notera b le réel obtenu.
5. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique.

Exercice 2 – Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = (x-1)\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites en $+\infty, 0$ et 1^-.
3. Déterminer la limite de $u\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$ quand $u \to 0^+$.
4. En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^+$. On utilisera le fait que pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

Exercice 3 – Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par

$$v_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \exp\left(\frac{v_n}{n+1}\right)$$

1. Écrire un programme qui permet d'afficher les 20 premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (de v_1 à v_{20}). Conjecturer la limite de (v_n).
2. Écrire un programme permettant de déterminer le premier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \leqslant 1.01$. *On pourra vérifier que $n = 102$.*
3. Écrire un programme permettant de déterminer le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \geqslant 1.005$. *On pourra vérifier que $n = 201$.*