TD 03 – Fonctions usuelles

À la fin de ce chapitre, les compétences suivantes doivent être maîtrisées.
- Savoir donner le *domaine de définition* d'une fonction ☐
- Savoir *composer* deux fonctions ☐
- Savoir étudier la *parité* d'une fonction ☐
- Savoir étudier la *monotonie* d'une fonction ☐
- Connaître les propriétés des *fonctions usuelles* et savoir les manipuler ☐

Questions de cours

Exercice 1 – Vrai/Faux. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses.
1. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble. Alors le quotient de f et g est bien défini.
2. La composée de deux fonctions est toujours bien définie.
3. La composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ est toujours bien définie.
4. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
5. Une fonction f est dite décroissante sur I si pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$, on a $f(x) \geqslant f(y)$.
6. Une fonction peut admettre un unique majorant.
7. Une fonction admet forcément un minimum.

Exercice 2 – Vrai/Faux sur la parité. Indiquer si les affirmations qui suivent sont vraies ou fausses. Dans toutes les questions, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
1. Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.
2. Si f est impaire alors $f(2) = -f(-2)$.
3. Si f est paire alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$ avec $f(x) \neq 0$ alors f n'est pas paire.

Exercice 3 – Sur les fonctions usuelles. Remplir le tableau suivant.

Fonction	Domaine	Parité	Monotonie	Majorants/minorants	Extrema
$x \mapsto \frac{1}{x}$					
$x \mapsto \sqrt{x}$					
$x \mapsto \lvert x\rvert$					
$x \mapsto \lfloor x \rfloor$					
$x \mapsto \ln(x)$					
$x \mapsto \exp(x)$					

Sur l'étude globale d'une fonction

Exercice 4 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.
1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$
6. $f_6 : x \mapsto \ln(x+3) - \ln(2x+1)$
7. $f_7 : x \mapsto x^{\frac{1}{7}}$
8. $f_8 : x \mapsto \exp(3x+2)$

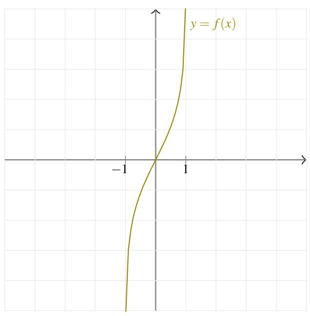
Exercice 5 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

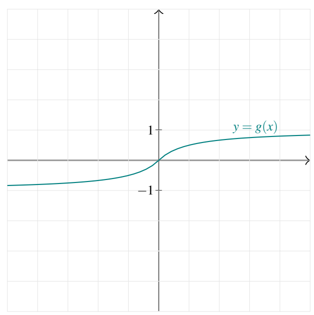
1. $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$
2. $f_2 : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$
3. $f_3 : x \mapsto \ln(e^x - 1)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

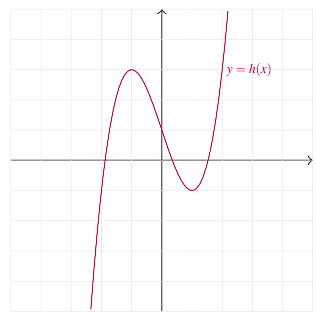
Exercice 6 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ *(on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).*

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$

Exercice 7 – Représentation graphique. Pour les fonctions suivantes, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.







Exercice 8 – Parité/imparité.

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction (en précisant au préalable le domaine de définition).
   1.(a) $f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^4+1}$
   1.(b) $f_2 : x \mapsto e^{x^2}$
   1.(c) $f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$
   1.(d) $f_4 : x \mapsto e^x - e^{-x}$
   1.(e) $f_5 : x \mapsto x^2 \ln(x)$
   1.(f) $f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}$
2. Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
3. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

Exercice 9 – Majorants/Minorants/Extrema.

1. Montrer que la fonction f est bornée, où f est la fonction définie par,
$$\text{pour tout } x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$
2. Montrer que la fonction g est majorée par 2, où g est la fonction définie par,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$
3. Montrer que h admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et le déterminer, où h est la fonction définie par,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = (x^2 - 4x + x)(x^2 + 6x + 9).$$
4. Montrer que j admet un minimum en $\frac{1}{2}$, où j est la fonction définie par,
$$\text{pour tout } x \in [0,1], \quad j(x) = x(1-x).$$

Exercice 10 – Monotonie.

1. Étudier les variations de la fonction f, définie par,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 - 3x + 2|.$$
2. Étudier les variations de la fonction g, définie par,
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = x - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Exercice 11 – Déterminer l'ensemble des fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes sur $\mathbb{R}$.

Sur les fonctions usuelles : exp, ln, valeur absolue,...

Exercice 12 – Autour de la valeur absolue.

1. Donner une expression de la fonction f sans valeur absolue, où f est définie par
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x^2 - 5x + 6|.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante
$$|2x+1| = x - 4.$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a. $|x-5| < 6$ b. $|x-3| \geqslant 4$ c. $|7-3x| \leqslant 5$ d. $|x+4| \leqslant 5-3x$
4. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a
$$\frac{3}{|x|+2} \geqslant 1.$$
5. Montrer que pour tout $t \in [-1,0[\cup]0,1]$, on a
$$\left|\frac{1-t}{t^2}\right| \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

Exercice 13 – Autour de la fonction inverse.

1. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < 4$?
2. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < -4$?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$.

Exercice 14 – Autour de la fonction racine carrée.

1. Préciser pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est définie et simplifier cette expression
$$f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 9}.$$
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{1+t^4} \leqslant 1 + t^2$.

Exercice 15 – Extrait de concours, HEC 2008. Soit $(p,q) \in]0,1[\times]0,1[$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$(p\mathrm{e}^x + q)^2 \geqslant 4pq\mathrm{e}^x.$$

Exercice 16 – Calculs algébriques sur $\ln$ et $\exp$.

1. Exprimer les nombres suivants uniquement à l'aide de $\ln(2)$:
$$\ln(8), \qquad \ln(\sqrt{2}), \qquad \ln(6) - \ln(3), \qquad \ln(2\mathrm{e}^2).$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes.

   2.(a) $\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}}$

   2.(b) $\frac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}$

   2.(c) $\mathrm{e}^{2\ln(x)}$ (pour $x > 0$)

   2.(d) $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (pour $x > 0$)

   2.(e) $\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

   2.(f) $\ln(\mathrm{e}^4) - \ln(\mathrm{e}^2) + \ln(\sqrt{\mathrm{e}})$

   2.(g) $\ln(e^2\sqrt{(}\mathrm{e})) + \ln(\frac{1}{\mathrm{e}})$

   2.(h) $\frac{\ln(\mathrm{e}^5)}{\ln(\mathrm{e}^3)}$

   2.(i) $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{e}^{-x}$

   2.(j) $\frac{\mathrm{e}^{x^2-2x} \times (\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^{2x})^3}$

Exercice 17 – Autour de la fonction logarithme. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\ln(1+t^2)}{1-\ln(2)}.$$

Exercice 18 – Autour de la fonction partie entière. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lfloor (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n+1.$$

Exercice 19 – Autour des fonctions puissances.

1. Calculer 3^3. En déduire la valeur de $27^{\frac{1}{3}}, 27^{\frac{2}{3}}$ et $27^{-\frac{2}{3}}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [1,3[$, on a
$$-2 \leqslant -\frac{2}{x^2} \leqslant -\frac{2}{9}.$$
3. Montrer que pour tout $x \in [-3,2]$, on a
$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}.$$
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \frac{1}{t}.$$
5. Montrer que pour tout $u \in [1,4]$, on a
$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1.$$
6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 2$. Montrer que l'on a
$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

Exercice 20 – Autour de la fonction partie entière. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Calculer $f(x)$.
2. Calculer $f(2.5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0,1[$, simplifier l'expression de f.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
5. En déduire la courbe représentative de f.

Exercice 21 – Résolution d'(in)équations. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x+1|+|x+2| = 1$
2. $\lfloor x^2+x+1 \rfloor = 2$
3. $\sqrt{x}+1 = x$
4. $3x^4+5x^2-2 = 0$
5. $(\ln(x))^2+3\ln(x)+2 = 0$
6. $e^x+e^{-x} = 2$
7. $\ln(3x)+\ln(x-1) = \ln(2)+2\ln(3)$
8. $|\ln(x)| < 1$
9. $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x)$
10. $e^{2x}+8 \geqslant 6e^x$