Chapitre 12 : Applications

1 Application, antécédent, image

Définition 1.1 Soient E et F deux ensembles. Une **application** d'un ensemble E dans un ensemble F est un objet qui, à tout élément x de E associe un unique élément y de F que l'on note $f(x)$. On note alors

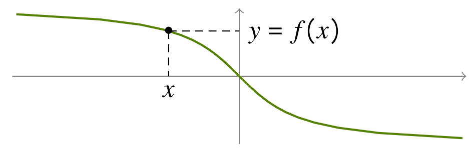
$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- E est appelé l'**ensemble de définition** de f, i.e.

$$\forall x \in E, \quad f(x) \text{ existe}$$

- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f, i.e.

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in F$$



Si $y = f(x)$ avec $x \in E$, on dit que
- x est un **antécédent** de y
- et que y est l'**image** de x par f.

Une application correspond donc à la donnée de trois éléments : un ensemble de départ E, un ensemble d'arrivée F et une expression f.

Exemple 1.2

Application	Ensemble de définition	Ensemble d'arrivée
$f: \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-2} \end{array}$	$[2,+\infty[$ car pour tout $x \in [2,+\infty[$, $\sqrt{x-2}$ existe	$\mathbb{R}_+$ car pour tout $x \in [2,+\infty[$, $\sqrt{x-2} \geqslant 0$
$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & k^2+3 \end{array}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$ car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^2+3 \in \mathbb{N}$
$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & (\ln(x))^2 \end{array}$	$\mathbb{R}_+^*$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^2$ existe	$\mathbb{R}_+$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x))^2 \in \mathbb{R}_+$
$j_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$	$\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 existe	$\mathbb{R}_+$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \in \mathbb{R}$
$j_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$	$\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 existe	$\mathbb{R}_+$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \in \mathbb{R}_+$
$j_3: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$	$\mathbb{R}$ car pour tout $x \in [0,1]$, x^2 existe	$\mathbb{R}_+$ car pour tout $x \in [0,1]$, $x^2 \in \mathbb{R}_+$

Exemple 1.3 Reprenons les fonctions de l'Exemple 1.2.

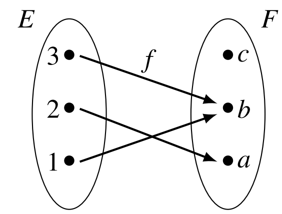
	Antécédent	Image
$f(2) = 0$	2 est un antécédent de 0 par f	0 est l'image de 2 par f
$g(2) = 7$	2 est un antécédent de 7 par g	7 est l'image de 2 par g
$g(-2) = g(2) = 7$	Les antécédents de 7 par g sont 2 et -2	7 est l'image de 2 par g

1.1 Comment représenter une application ?

On peut représenter une application de deux manières :
- Sous forme de diagrammes fléchés (lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont de cardinal fini)
- En représentant son graphe dans le plan muni $\mathbb{R}^2$ d'un repère.

Exemple 1.4 Soit $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ l'application f représentée ci-contre.

- L'ensemble de définition de f est $\{1,2,3\}$
- L'ensemble d'arrivée de f est $\{a,b,c\}$
- L'image de 2 par f est a
- L'élément b admet deux antécédents qui sont 1 et 3.



- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?

  Non, l'application n'est pas surjective car l'élément c de l'espace d'arrivée n'admet aucun antécédent.

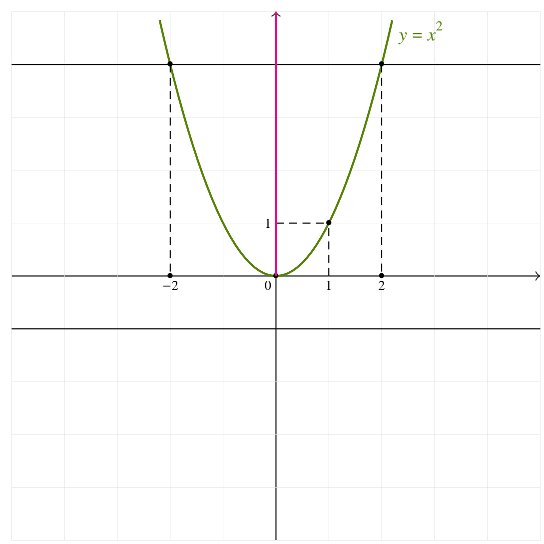
- L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?

  Non, l'application n'est pas injective car l'élément b de l'espace d'arrivée admet deux antécédents.

- Quel est l'*image* de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?

  L'image de cette application est l'ensemble $\{b,c\}$.

Exemple 1.5



Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application suivante.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

- L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$
- L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$
- L'image de 1 par f est 1
- L'élément 4 a deux antécédents qui sont 2 et -2.

- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?

  Non, l'application n'est pas surjective car l'élément -1 de l'espace d'arrivée n'admet aucun antécédent.

- L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?

  Non, l'application n'est pas injective car l'élément 4 de l'espace d'arrivée admet deux antécédents.

- Quel est l'*image* de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?

  L'image de cette application est l'ensemble $[0,+\infty[$.

1.2 Comment montrer que deux applications sont égales ?

Proposition 1.6 Deux applications f et g sont égales si
- elles ont le même ensemble de départ E,
- elles ont le même ensemble d'arrivée F,
- et elles ont la même expression :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = g(x)$$

Ainsi, les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas les mêmes, alors qu'elles ont la même expression. Par exemple, on a le droit de considérer l'objet mathématique $f(2)$ alors qu'on a pas le droit de considérer $g(2)$ (bien qu'on pourrait très facilement lui donner un sens...).

Exemple 1.7 Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1+e^{-x})$$

Montrons que les deux applications sont égales.
- Elles ont le même ensemble de départ, donné par $\mathbb{R}$.
- Elles ont le même ensemble d'arrivée, donné par $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = \ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x) + \ln(1+e^{-x}) = x + \ln(1+e^{-x}) = g(x)$$

Donc, les deux applications f et g sont égales.

1.3 Comment déterminer l'image d'un élément ?

Pour déterminer l'image d'un élément $x \in E$ par l'application f, il faut calculer $f(x)$.

Exemple 1.8 On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Calculer l'image de l'élément 4 par l'application f.

Il s'agit de calculer $f(4)$. On a

$$f(4) = 4^2 = 16.$$

Donc l'image de 4 par la fonction f est 16.

Exemple 1.9 On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, 3x-2y) \end{array}$$

Calculer l'image de l'élément $(1,3)$ par l'application f.

Il s'agit de calculer $f(1,3)$. On a

$$f(1,3) = (2\times 1 - 3, 3\times 1 - 2\times 3) = (-1,-3)$$

Donc l'image de $(1,3)$ par la fonction f est $(-1,-3)$.

1.4 Comment déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément ?

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

Pour déterminer les antécédents d'un élément $y \in F$ par l'application f, il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. L'ensemble des solutions de cette équation correspond à l'ensemble des antécédents de y par f.

Exemple 1.10 On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Calculer l'antécédent de 36 par f.

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 36$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons *par équivalence*. On a,

$$f(x) = 36 \iff x^2 = 36 \iff x = 6 \text{ ou } x = -6.$$

Donc, l'élément 36 admet exactement deux antécédents donnés par 6 et -6.

Vérification.

$$f(6) = 6^2 = 36 \quad \checkmark \qquad \text{et} \qquad f(-6) = (-6)^2 = 36 \quad \checkmark$$

Exemple 1.11 On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, 3x-2y) \end{array}$$

Déterminer l'ensemble des antécédents de l'élément $(0,1)$ par l'application f.

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y) = (0,1)$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons *par équivalence*. On a,

$$\begin{aligned} f(x,y) = (0,1) &\iff (2x-y, 3x-2y) = (0,1) \\ &\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2x \\ -x = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \\ &\iff (x,y) = (-1,-2) \end{aligned}$$

Ainsi, l'élément $(0,1)$ admet un unique antécédent donné par $(-1,-2)$.

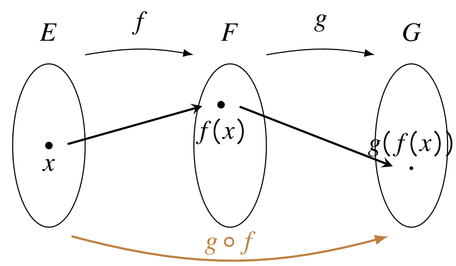
Vérification.

$$f((-1,-2)) = (2\times(-1)-(-2), 3\times(-1)-2\times(-2)) = (0,1) \qquad \checkmark$$

2 Composition de deux applications

Définition 2.1 Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée $g \circ f$ est l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Avec les notations ci-dessus, $g \circ f$ est bien définie mais pas forcément $f \circ g$. De plus, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, en générale, ces deux applications ne sont pas égales.

Proposition 2.2 Soient E, F et G quatre ensembles.Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Exemple 2.3 On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

- **Étude de $g \circ f$.** Commençons par faire le schéma de composition.

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Donc

$$g \circ f : \quad \mathbb{R}_+^* \quad \to \quad \mathbb{R}$$

est bien définie et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

- **Étude de $f \circ g$.** Commençons par faire le schéma de composition. On a

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Comme $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}_+^*$, l'application $f \circ g$ n'est pas bien définie.

Exemple 2.4 On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

- **Étude de $g \circ f$.** Commençons par faire le schéma de composition.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Donc $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (g\circ)f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

- **Étude de $f \circ g$.** Commençons par faire le schéma de composition.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Donc $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f\circ)g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

3 Image directe d'une application

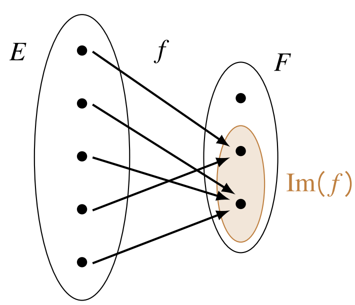
Définition 3.1 Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **image directe** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble suivant

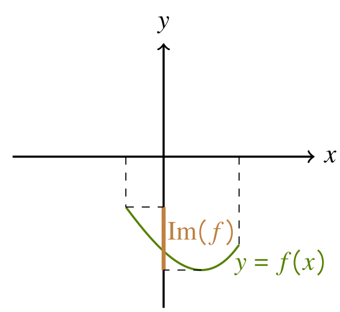
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) |\ x \in E\} = \{y \in F |\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

L'image de f correspond à l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent par f. On a donc la caractérisation suivante :

$$y \in \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in E,\ y = f(x).$$

C'est une partie de F, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f) \subset F$.





? Pour déterminer **l'image** d'une application $f : E \to F$, on dispose de plusieurs méthodes.

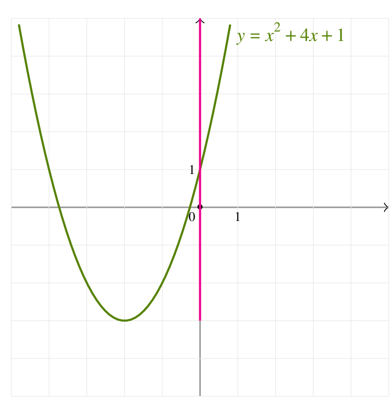
1. Si E et F sont des sous-parties de $\mathbb{R}$, on peut tracer le tableau de variation de la fonction pour visualiser l'ensemble des valeurs prises par la fonction.
2. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un ensemble donné, on peut procéder par double-inclusion.

Exemple 3.2 — **Avec la méthode 1.**

Déterminer l'image de l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc on peut déduire ses variations grâce au signe de sa dérivée de la manière suivante.



x	0		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit (de manière non prouvée) que

$$\mathrm{Im}(f) = [-3, +\infty[$$

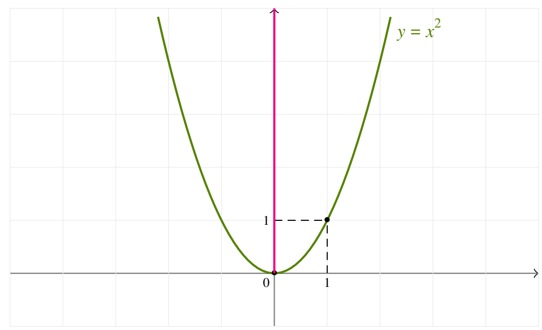
<u>Exemple 3.3</u> — **Avec la méthode 2.**

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrer que l'image de f est donné par

$$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$$



Raisonnons par *double inclusion*.

- Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset [0, +\infty[$.
  <u>Soit</u> $y \in \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire

  $$\text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = f(x) = \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

  <u>Montrons que</u> $y \in [0, +\infty$, c'est-à-dire montrons que

  $$y \geqslant 0 \qquad (\textit{condition} \text{ à vérifier})$$

  On a

  $$y = f(x) = x^2 \geqslant 0$$

  Donc $y \in [0, +\infty[$. D'où $\mathrm{Im}(f) \subset [0, +\infty[$.
- Montrons que $[0, +\infty[\subset \mathrm{Im}(f)$.
  <u>Soit</u> $y \in [0, +\infty$, c'est-à-dire

  $$y \geqslant 0 \qquad (\textit{condition} \text{ vérifiée})$$

  <u>Montrons que</u> $y \in \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire montrons que

  $$\text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = f(x) \qquad (\text{existence } \textit{paramètre})$$

  Posons $x = \sqrt{y}$. Tout d'abord, x existe bien car $y \geqslant 0$. De plus,

  $$f(x) = x^2 = y$$

  Donc $y \in \mathrm{Im}(f)$. D'où $[0, +\infty[\subset \mathrm{Im}(f)$.
- Finalement, on a bien montré que

  $$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$$

Exemple 3.4 — **Avec la méthode 2.** On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,-3x+3y) \end{array}$$

Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \{(a,-3a) | a \in \mathbb{R}\}$$

Notons F l'ensemble de droite. Raisonnons par *double inclusion*.

- Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

Soit $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $(a,b) \in F$.

- *Ce que l'on sait.* Comme $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$, on sait que

$$\exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ (a,b) = f(x,y). \tag{Info}$$

- *Ce que l'on veut montrer.* Pour montrer que $(a,b) \in F$, il s'agit de montrer que

$$b = -3a$$

En utilisant l'expression de l'application f et (Info), on obtient que

$$\begin{cases} a &= x-y \\ b &= -3x+3y \end{cases}$$

Et donc

$$b = -3x+3y = -3(x-y) = -3a$$

Donc $(a,b) \in F$.

Donc $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

- Montrons que $F \subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit $(a,b) \in F$. Montrons que $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$.

- *Ce que l'on sait.* Comme $(a,b) \in F$, on sait que

$$b = -3a \tag{Info}$$

- *Ce que l'on veut montrer.* Pour montrer que $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$, il s'agit de montrer que

$$\exists\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ (a,b) = f(x,y) = (x-y,-3x+3y)$$

Posons $x = a$ et $y = 0$. Alors

$$f(x,y) = (x-y,-3x+3y) = (a,-3a) = (a,b)$$

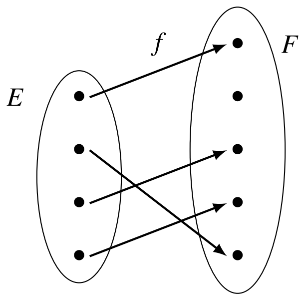
Donc $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$.

Donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$.

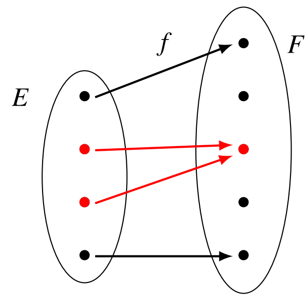
4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

4.1 Injectivité

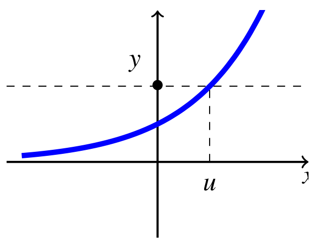
Définition 4.1 On dit qu'une application $f : E \to F$ est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E par f



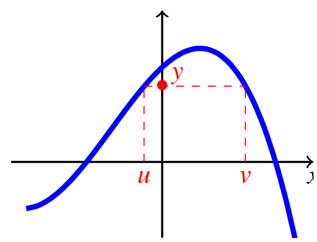
Injective



Non injective



Injective



Non injective

Proposition 4.2 Soit $f : E \to F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'application $f : E \to F$ est injective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au plus une solution dans E.
3. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.
4. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$, c'est-à-dire deux éléments distincts n'ont pas la même image par f.

Proposition 4.3 Soit $f : E \to F$ une application. L'application $f : E \to F$ n'est pas injective s'il existe deux éléments distincts de E, x et y tels que $f(x) = f(y)$.

? Pour démontrer que $f : E \to F$ est **injective**, voici la rédaction habituelle.

Soient x et y des éléments de E quelconques.
Supposons que $f(x) = f(y)$.
Montrons que $x = y$.
Insérer raisonnement mathématique
Donc $x = y$. Ainsi, l'application $f : E \to F$ est injective.

Pour démontrer que $f : E \to F$ n'est **pas injective**, voici la rédaction habituelle.

*Soient $x =$*donner valeur* et $y =$*donner valeur*.*
D'une part, $x \neq y$.
*D'autre part, $f(x) = f(y)$ car *insérer raisonnement mathématique*.*
Donc l'application $f : E \to F$ n'est pas injective.

Exemple 4.4 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x,x^2) \end{array}$$

Montrons que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ est injective.

Soient x et y des éléments de $\mathbb{R}$ quelconques.

Supposons que $f(x)=f(y)$.

Montrons que $x=y$.

Comme $f(x)=f(y)$, on a $(x,x^2)=(y,y^2)$, c'est-à-dire $x=y$ et $x^2=y^2$.

En particulier, on a $x=y$. Ainsi, l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ est injective.

Exemple 4.5 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-3y,x+2y) \end{array}$$

Montrons que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ est injective.

Soient $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ des éléments de $\mathbb{R}$ quelconques.

Supposons que $f(u)=f(v)$.

Montrons que $u=v$.

Comme $f(u)=f(v)$, on a $(x+y,x-3y,x+2y)=(x'+y',x'-3y',x'+2y')$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x+y=x'+y' \\ x-3y=x'-3y' \\ x+2y=x'+2y' \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=x'+y' \\ -4y=-4y' & L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ y=y' & L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases} \iff u=v$$

Donc $u=v$. Ainsi, l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ est injective.

Exemple 4.6 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ n'est pas injective.

Soient $x=1$ et $y=-1$.

D'une part, $x\neq y$.

D'autre part, $f(1)=1^2=1$ et $f(-1)=(-1)^2=1$ donc $f(1)=f(-1)$.

Donc l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ n'est pas injective.

Exemple 4.7 On considère l'application

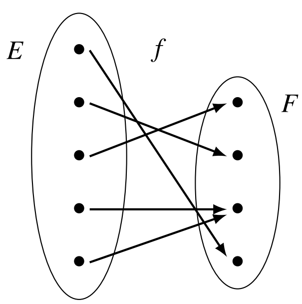
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est injective.

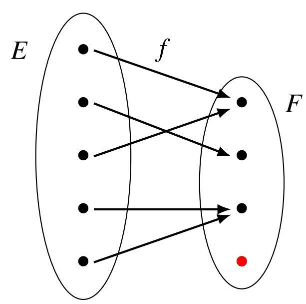
> Soient x et y des éléments de $\mathbb{R}_+$ quelconques.
>
> Supposons que $f(x) = f(y)$.
>
> Montrons que $x = y$.
>
> Comme $f(x) = f(y)$, on a $x^2 = y^2$, donc $x = y$ ou $x = -y$. Comme x et y sont positifs, nécessairement, $x = y$.
>
> Donc $x = y$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est injective.

4.2 Surjectivité

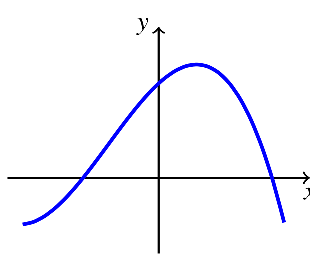
Définition 4.8 On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent dans E par f.



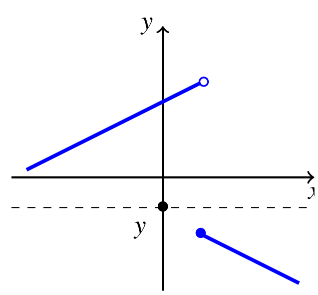
Surjective



Non surjective



Surjective



Non surjective

Proposition 4.9 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \to F$ est surjective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.
3. Pour tout élément y de F, il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$.
4. $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition 4.10 Soit $f : E \to F$ une application. L'application $f : E \to F$ n'est pas surjective s'il existe un élément $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent par f.

? Pour démontrer que $f : E \to F$ est **surjective**, voici la rédaction habituelle.

> *Soit y un élément de F quelconque.*
> *Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
>
> **Insérer raisonnement mathématique**
>
> *Donc $y = f(x)$ avec $x \in E$. Ainsi, l'application $f : E \to F$ est surjective.*

Pour démontrer que $f : E \to F$ n'est **pas surjective**, voici la rédaction habituelle.

> *Soit y =*donner valeur*.*
> *Montrons que y n'admet pas d'antécédent par f, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet pas de solution.*
>
> **Insérer raisonnement mathématique**
>
> *Donc l'application $f : E \to F$ n'est pas surjective.*

Exemple 4.11 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

Soit z un élément de $\mathbb{R}$ quelconque.

Montrons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = f(x,y)$.

On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy = z$.

Ici, on trouve une solution "évidente". On peut prendre par exemple $(x,y) = (z,1)$ (ou bien encore $(x,y) = (1,z)$,...) car $xy = z \times 1 = z$.

Donc $z = f(z,1)$ avec $(z,1) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, l'application$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

Exemple 4.12 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z) \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est surjective.

Soit $v = (a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ quelconque.

Montrons qu'il existe $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = f(u)$, c'est-à-dire $(a,b) = (x+y+z, x-z)$. On a

$$f(u) = v \iff \begin{cases} x+y+z = a \\ x-z = b \end{cases} \iff \begin{cases} (b+z)+y+z = a \\ x = b+z \end{cases} \iff \begin{cases} y = a-b-2z \\ x = b+z \end{cases}$$

En prenant par exemple $z = 0$, on trouve que $v = f(u)$ avec $u = (b, a-b, 0) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est surjective.

Exemple 4.13 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

> Soit $y = -1 \in \mathbb{R}$.
>
> Montrons que y n'admet pas d'antécédent par f, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet pas de solution. On a :
>
> $$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -1.$$
>
> Donc, l'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solution. Donc l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Exemple 4.14 On considère l'application

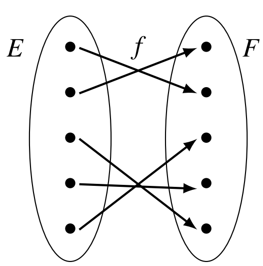
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective.

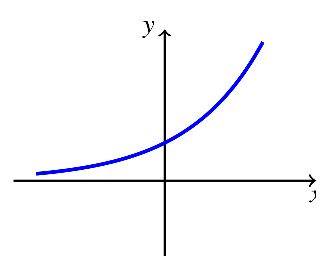
> Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$ quelconque.
>
> Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
>
> On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^2$. Comme y est positif, cette équation admet deux solutions données par $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.
>
> Donc, par exemple, $y = f(\sqrt{y})$ avec $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$. Donc l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective.

4.3 Bijectivité

Définition 4.15 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **bijective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent dans E par f.



Bijective



Bijective

Proposition 4.16 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \to F$ est bijective.
2. Pour tout élément y de F, il existe un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.
3. L'application $f : E \to F$ est injective et surjective.

Proposition 4.17 Soit $f : E \to F$ une application. L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } x \in E,\ g(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } y \in F,\ f(g(y)) = y.$$

Dans ce cas, l'application g est unique. Elle est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}.

Exemple 4.18 La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln : R_+^* \to \mathbb{R}$ sont bijectives et sont des bijections réciproques l'une de l'autre car

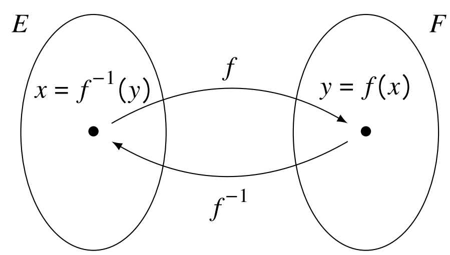
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(y)) = y.$$

Proposition 4.19 Soit $f : E \to F$ bijective. Alors, la bijection réciproque est l'application qui, à un élément y de F, associe l'unique antécédent de y par f dans E, noté x,

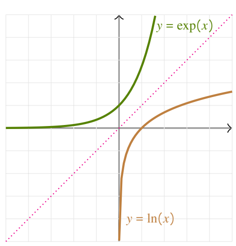
$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}$$

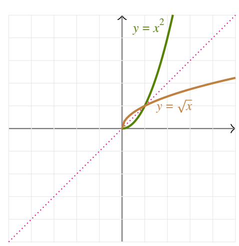
De plus, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a

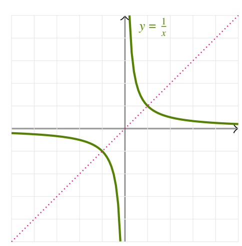
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$



Proposition 4.20 Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ bijective. Alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.







Pour démontrer que $f : E \to F$ est **bijective**, on dispose de plusieurs méthodes.

1. On donne directement l'expression d'une fonction g telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

   Soit $x \in E$. Montrons que $g(f(x)) = x$.

   Insérer raisonnement mathématique

   Soit $y \in F$. Montrons que $f(g(y)) = y$.

   Insérer raisonnement mathématique

   Donc, $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

2. On montre que, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet une unique solution. Dans ce cas, f est bijective et on obtient aussi l'expression de f^{-1}. Dans ce cas, voici la rédaction habituelle.

Soit y un élément de F quelconque.
Montrons qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Insérer raisonnement mathématique

Donc il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, l'application $f : E \to F$ est bijective et pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$.

3. On montre que $f : E \to F$ est injective et surjective à l'aide des méthodes expliquées précédemment. Dans ce cas, f est bijective mais on n'obtient pas l'expression de f^{-1}.

Exemple 4.21 — **Avec la méthode 1.** On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}$$

Montrons que l'application f est bijective, de bijection réciproque donnée par g.

Soit $k \in Z$. Montrons que $g(f(k)) = k$. On a

$$g(f(k)) = g(k+1) = (k+1) - 1 = k.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que $f(g(n)) = n$. On a

$$f(g(n)) = f(n-1) = (n-1) + 1 = n.$$

Donc, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 4.22 — **Avec la méthode 2.** On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Soit $v = (a,b)$ un élément de $\mathbb{R}^2$ quelconque.

Montrons qu'il existe un unique $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$.

Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(u) = v \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Donc il existe un unique $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$, donné par $u = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et pour tout $v = (a,b) \in F$, on a

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) \end{array}$$

Exemple 4.23 — **Avec la méthode 3.** On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrons que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est bijective.

- Injectivité.
  Soient n_1 et n_2 des éléments de $\mathbb{N}$ quelconques.
  Supposons que $f(n_1) = f(n_2)$.
  Montrons que $n_1 = n_2$.
  - Si $f(n_1) = f(n_2) \geqslant 0$ alors nécessairement, n_1 et n_2 sont pairs, donc
  $$f(n_1) = \frac{n_1}{2} = f(n_2) = \frac{n_2}{2}$$
    et donc $n_1 = n_2$.
  - Si $f(n_1) = f(n_2) \leqslant 0$ alors nécessairement, n_1 et n_2 sont impairs, donc
  $$f(n_1) = -\frac{n_1+1}{2} = f(n_2) = -\frac{n_2+1}{2}$$
    et donc $n_1 = n_2$.

  Finalement, dans tous les cas, on a $n_1 = n_2$. Ainsi, l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est injective.
- Surjectivité.
  Soit k un élément de $\mathbb{Z}$ quelconque.
  Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = f(n)$.
  - Si $k \geqslant 0$ alors, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que n est pair et $k = \frac{n}{2}$. On peut prendre $n = 2k \in \mathbb{N}$.
  - Si $k < 0$ alors, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que n est impair et $k = -\frac{n+1}{2}$. On peut prendre $n = -2k - 1 \in \mathbb{N}$.

  Dans tous les cas, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = f(n)$. Ainsi, l'application$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est surjective.
- Conclusion.
  L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est injective et surjective, elle est donc bijective.

Proposition 4.24 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors
1. Alors $g \circ f : E \to G$ est une bijection.
2. Et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.