TD 12 – APPLICATIONS

Exercice 1 – On résout ℓ 'équation $f(x)=4$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$. Suit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=4 &\Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+1}=4\\ &\Leftrightarrow 3x+4=4\left(x^2+1\right)\\ &\Leftrightarrow 4x^2-3x=0\\ &\Leftrightarrow x(4x-3)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 4x-3=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de 4 par f est donné par

$$\left\{0,\frac{3}{4}\right\}$$

On résout l'équation $f(x)=-1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=-1 &\Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+1}=-1\\ &\Leftrightarrow 3x+4=-\left(x^2+1\right)\\ &\Leftrightarrow x^2+3x+5=0 \end{aligned}$$

$$\Delta=(3)^2-4\times1\times5=9-20=-11<0$$

donc l'équation $x^2+3x+5=0$ $\quad x'$ admet de solution. Donc - 1 n'admet pas d'antécédent par f

On résout l'équation $g(x,y,z)=(1,2)$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a:
$g(x,y,z)=(1,2)\Leftrightarrow(2x+y+z,x+2y-z)=(1,2)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1\\ x+2y-z=2\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2\\ 2x+y+z=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2\\ -3y+3z=-3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=2\\ y=z+1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-z\\ y=z+1\end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par g est donné par

$$\{(-z,z+1,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 2 – 1. **Pour gof**

On a:

$$\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

Donc $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x)&=g(f(x))\\ &=g(3x+1)\\ &=-2(3x+1)+6\\ &=-6x+4 \end{aligned}$$

Pour fog

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

donc $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-2x+6) \\ &= 3(-2x+6)+1 \\ &= -6x+19\end{aligned}$$

2. On a $f \circ g \neq g \circ f$ car par exemple, $(f \circ g)(0) = 19$ alors que $(g \circ f)(0) = 4$.
3.
4. $f]-3,1]\rangle =]\cdot 8,4]$
   $g\langle[-1,1]\rangle = [4,8]$

Exercice 3 – Comme pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, on a $1+e^x \geq 1 > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, g est une fonction affine donc est bien définie sur $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Donc $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Objectif: Montrons que $f - f \circ g = id_R$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - (f \circ g)(x) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}f(x) - (f \circ g)(x) &= \ln(1+e^x) - f(-x) \\ &= \ln(1+e^x) - \ln\left(1+e^{-x}\right) \\ &= \ln\left(e^x\left(e^{-x}+1\right)\right) - \ln\left(1+e^{-x}\right) \\ &= \ln(e^x) + \ln\left(e^{-x}+1\right) - \ln\left(1+e^{-x}\right) \\ &= x.\end{aligned}$$

Exercice 4 – .

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$

La fonction f est définie et dérivable sue $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas $\left(\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \neq 0\right)$.

Et sa dérivée vaut:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{3\left(x^2+1\right) - (3x+4) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{-3x^2-8x+3}{\left(x^2+1\right)^2}\end{aligned}$$

Résolution de

$$-3x^2 - 8x + 3 = 0$$

$\Delta = 100 > 0$ donc 2 racines réelles $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = -3$

Limite en $+\infty$

$$\forall x \neq 0, f(x) = \frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Donc $\lim_{\pm\infty} f = 0$

x	$-\infty$		-3		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations f	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0

Donc

$$\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

Exercice 5 – Procédons par double inclusion.

- Montrons que $\operatorname{Im}(f) \subset F$.

Soit $(a,b,c) \in \operatorname{Im}(f)$. Montrons que $(a,b,c) \in F$. Comme $(a,b,c) \in \operatorname{Im}(f)$, on sait qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b,c) = f(x,y)$, c'est-àdire

$$\begin{cases} a = x+2y \\ b = x+y \\ c = x+3y \end{cases}$$

Pour montrer que $(a,b,c) \in F$, il s'agit de montrer que $2a-b-c=0$. On a

$$2a-b-c = 2(x+2y)-(x+y)-(x+3y) = 0$$

Donc $(a,b,c) \in F$ et on a montré que $\operatorname{Im}(f) \subset F$.

- Montrons que $F \subset \operatorname{Im}(f)$.

Soit $(a,b,c) \in F$. Montrons que $(a,b,c) \in \operatorname{Im}(f)$. Comme $(a,b,c) \in F$, on sait que $2a-b-c=0$. Pour montrer que $(a,b,c) \in F$, il s'agit de trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b,c) = f(x,y)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) = (a,b,c) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a \\ x+y = b \\ x+3y = c \quad (\text{ et } c = 2a-b) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = a \\ -y = b-a \\ y = 2a-b-a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a+2b \\ y = a-b \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $(a,b,c) = f(-a+2b, a-b)$ et donc $(a,b,c) \in \operatorname{Im}(f)$. Ainsi, $F \subset \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 6 – .

1. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2+1 \end{array}$.

   - Injectivité

   Soient $x=1$ et $y=-1$ deux éléments de $\mathbb{R}$. D'une part, $x \neq y$.
   D'autre part, $h(x) = 3 = h(y)$
   Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

   - surjectivité

   l'équation $h(x) = x^2+1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$).
   Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h.
   Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

2. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$.

   Injectivité Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$tels que $h(x) = h(y)$. Montrons que $x=y$. Comme $h(x) = h(y)$, on a

   $$\begin{gathered} x^2+1 = y^2+1 \\ \text{c'est à dire} \quad x^2 = y^2 \\ \text{c'est à dire} \quad x = y \text{ ou } x = -y \end{gathered}$$

   Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x=y$. Donc $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.

   - surjectivité

   l'équation $h(x) = x^2+1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ done $x^2+1 \geqslant 1$).
   Donc $0n'$ admet pas d'antécédent par h.
   Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad n$ 'est pas surjective.

3. $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}+[1,+\infty[\\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$

   Injectivité: Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$tels que $h(x) = h(y)$.

Montrons que $x = y$.
Comme $h(x) = h(y)$, on a

$$x^2+1 = y^2+1$$
$$\text{c'est à dire} \quad x^2 = y^2$$
$$\text{c'est à dire} \quad x = y \text{ ou } x = -y$$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x = y$. Donc $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est injective.
surjectivité: soit $y \in [1;+\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} h(x) = y &\Leftrightarrow x^2+1 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 = y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \text{ ou } x = -\sqrt{y-1} \text{ car } y-1 \geqslant 0 \text{ car } y \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \text{ car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $y = h(x)$ arec $x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}_+$ Donc $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est surjective.
Bijectivité: $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est bijective car elle est injective et surjective.

Exercice 7 – 1. $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+2 \end{array}$

Injectivité: Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.
Montrons que $n_1 = n_2$. comme $f(n_1) = f(n_2)$, on a $n_1+2 = n_2+2$ et donc $n_1 = m_2$.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective.
surjectivité: L'équation $m+2 = 0 \quad m$ 'admet pas de solution dans IN none 0 n'admet pas d'antécédent par f.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n'est pas surjective (et donc non bijective)

2. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x+y \end{array}$

Injectivité: On a $f(0,1) = 1 = f\left(\frac{1}{2},0\right)$ alors que $(0,1) \neq \left(\frac{1}{2},0\right)$. Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}m'$ est pas injective (et donc non bijective)
Surjectivité: Soit $z \in \mathbb{R}$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = 2x+y = z$
On peut prendre par ex, $(x,y) = (0,z) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi $z = f(0,z)$. Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

3. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$

Injectivité: soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. Comme $f(x) = f(y)$, on a $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ et donc $x = y$. Donc $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est injective.
Surjectivité: L'équation $\frac{1}{x} = 0$ (dans $\mathbb{R}_+^*$) n'a pas de solution (car $\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = x \times 0 = 0$ pour $x \neq 0$).
Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f. Donc f n'est pas surjective (et donc non bijective)

4. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto |x+1| \end{array}$

Injectivité:
on a $f(0) = |1| = 1$
et $f(-2) = |-1| = 1$
Donc $f(0) = f(-2)$.
Mais $0 \neq -2$.
Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ n'est pas injective (et donc non bijective).
Surjectivité: Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = |x+1| = y$.
on peut prendre par exemple $x = y-1 \in \mathbb{R}$ car

$$f(y-1) = |y| = y \text{ car } y \geqslant 0.$$

donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$est surjective.

5. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2+1} \end{array}$

Injectivité: Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tq $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
comme $f(x) = f(y)$, on a :

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$$

et donc en élevant au carré,

$$x^2+1=y^2+1$$

donc $x^2=y^2$
donc $x=y$ et $x=-y$.
or, x et y sont tous les deux positifs donc nécessairement, $x=y$.
Donc $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est injective.
Surjectivité: comme une racine carrée est toujours positive, l'équation $\sqrt{x^2+1}=-1$ n'admet pas de solutions.
Donc -1 n'admet pas d'antécédent par f
Donc $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ n'est pas surjective (et donc pas bijective).

Exercice 8 – 1. Pour montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est bijective, on va montrer que

$$f\circ g=id_{\mathbb{R}^2} \text{ et } g\circ f=id_{\mathbb{R}^2}$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
f(g(x,y)) &= f\left(\frac{3x-2y}{5},\frac{x+y}{5}\right)\\
&= \left(\frac{3x-2y}{5}+2\times\frac{x+y}{5},-\frac{3x-2y}{5}+3\times\frac{x+y}{5}\right)\\
&= \left(\frac{3x-2y+2x+2y}{5},\frac{-3x+2y+3x+3y}{5}\right)\\
&= \left(\frac{5x}{5},\frac{5y}{5}\right)\\
&= (x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(f(x,y)) &= g(x+2y,-x+3y)\\
&= \left(\frac{3(x+2y)-2(-x+3y)}{5},\frac{(x+2y)+(-x+3y)}{5}\right)\\
&= \left(\frac{3x+6y+2x-6y}{5},\frac{x+2y-x+3y}{5}\right)\\
&= \left(\frac{5x}{5},\frac{5y}{5}\right)\\
&= (x,y)
\end{aligned}$$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donné par g.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation $f(x,y)=(a,b)$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ admet une unique solution. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x,y)=(a,b) &\Leftrightarrow (2x-y,x-y)=(a,b)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=a\\ x-y=b\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=b\\ 2x-y=a\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=b\\ y=-2b+a \quad L_2\leftarrow L_2-2L_1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=a-b\\ y=a-2b\end{cases}
\end{aligned}$$

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, l'équation $f(x,y)=(a,b)$ admet une unique solution donnée par

$$(x,y)=(a-b,a-2b)$$

Donc $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est bijective et sa bijection réciproque est donne par:
$f^{-1}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$
$\quad(a,b)\longrightarrow(a-b,a-2b)$

3. Soit $y\in\mathbb{R}$. Montrons que l' équation $f(x)=y$ d'inconnue $x\in]-\frac{1}{2};+\infty[$ admet une unique solution.
Soit $x\in]-\frac{1}{2};+\infty[$ On a

$$\begin{aligned} f(x)=y &\Leftrightarrow \ln(2x+1)-1=y \\ &\Leftrightarrow \ln(2x+1)=y+1 \\ &\Leftrightarrow 2x+1=\exp(y+1) \\ &\Leftrightarrow x=\frac{\exp(y+1)-1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y\in\mathbb{R}$, il existe un unique $x\in]-\frac{1}{2};+\infty[$ tel que $f(x)=y$, donné par

$$x=\frac{\exp(y+1)-1}{2}$$

Donc $f:]-\frac{1}{2};+\infty[\to\mathbb{R}$ est bijective et sa bijection réciproque est donne par:

$$f^{-1}: \begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow]-\dfrac{1}{2};+\infty[\\ y\longmapsto \dfrac{\exp(y+1)-1}{2} \end{array}$$

Exercice 9 –

Exercice 10 – 1. Suit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y)=(0,0) &\Leftrightarrow (3x-y,2y-6x)=(0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=0 \\ -6x+2y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=0 \\ \quad 0=0 \qquad L_2\leftarrow L_2+2L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y=3x \end{aligned}$$

l'ensemble des antécédents de $(0,0)$ est donné par:

$$\{(x,3x)\mid x\in\mathbb{R}\}$$

2. Montrons que $\mathrm{Im}(f)=\underbrace{\{(a,-2a)\mid a\in\mathbb{R}\}}_{=F}$ par double inclusion.

   - Montrons que $\mathrm{Im}(f)\subseteq F$.
   Soit $(a,b)\in\mathrm{Im}(f)$.
   Montrons que $(a,b)\in F$.
   Comme $(a,b)\in\mathrm{Im}(f)$, il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $(a,b)=(3x-y,2y-6x)$.
   Pour montrer que $(a,b)\in F$, il s'agit de montrer que $b=-2a$. On a

$$\begin{aligned} -2a &= -2(3x-y) \\ &= -6x+2y \\ &= b. \end{aligned}$$

   Donc $(a,b)\in F.$ Donc $\mathrm{Imf}\subseteq F$.
   - Montrons que $F\subseteq \mathrm{Im}\, f$.
   Soit $(a,b)\in F$.
   Montrons que $(a,b)\in\mathrm{Im}\, f$. Comme $(a,b)\in F$, on sait que $b=-2a$.
   On cherche $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $(a,b)=f(x,y)$. on peut prendre par ex

$$(x,y)=(0,-a)$$

   car $f(0,-a)=(a,-2a)=(a,b)$ par hypothèse. Donc $(a,b)\in\mathrm{Im}\, f$.
   Donc $F\subseteq\mathrm{Im}\, f$.
3. **Injectivité:**
   D'après la question 1, $f(0,0)=f(1,3)=(0,0)$ (l'élément $(0,0)$ admet une infinité d'antécédent).
   Mais: $(0,0)\neq(1,3)$.
   Donc $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ n'est pas injective (et donc pas bijective).
   Surjectivité:
   D'après la question 2, $\mathrm{Im}\, f=\{(a,-2a)\mid a\in\mathbb{R}\}\neq\mathbb{R}^2$ (par ex $(1,0)\notin\mathrm{Im}\, f$ car $0\neq-2\times1$)
   Donc $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ n'est pas surjective.

Exercice 11 – 1. Cette question consiste à montrer que f est bien définie au sens où :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}, f(x)\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) = -1 &\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = -1 \\
&\Leftrightarrow 1-x = -(1+x) \\
&\Leftrightarrow 1-x = -1-x \\
&\Leftrightarrow \underbrace{1=-1}_{\text{inpossible}}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f(x) \neq -1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$\begin{aligned}
(\underbrace{f \circ f}_{\text{bien déf.}})(x) &= f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\
&= \frac{1+x-(1-x)}{1+x} \\
&= \frac{2x}{1+x} \times \frac{1+x}{2} \\
&= x
\end{aligned}$$

3. Comme $f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$, f est bijective et sa bijection réciproque est donné par elle-même.