TD 13 – Outils pour les probabilités

Sur la factorielle

Exercice 1 – Calculer les nombres suivants :

$$\text{a) } 5! \qquad \text{b) } \frac{8!}{6!} \qquad \text{c) } \frac{500!}{499!} \qquad \text{d) } \frac{8!}{6!2!}$$

Exercice 2 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

$$\text{a) } 5\times 6\times 7\times 8\times 9 \qquad \text{b) } (n-2)(n-1)n \qquad \text{c) } 2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n) \qquad \text{d) } 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)$$

Exercice 3 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Combien y'a-t-il d'applications bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ qui envoie 1 sur 1. Les lister/les représenter.
2. Combien y'a-t-il d'applications injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$? Les lister/les représenter.
3. Combien y'a-t-il d'applications surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$? Les lister/les représenter. *On pourra commencer par compter les applications non surjectives.*

Coefficients binomiaux

Exercice 4 – Calculer les coefficients binomiaux ci-dessous.

$$\text{a. } \binom{7}{0} \qquad \text{b. } \binom{8}{8} \qquad \text{c. } \binom{25}{1} \qquad \text{d. } \binom{25}{2} \qquad \text{e. } \binom{25}{23} \qquad \text{f. } \binom{10}{6}$$

Exercice 5 – Soit $n \geqslant 3$. Calculer les trois quantités suivantes en fonction de n.

$$\text{a. } \binom{n}{1} \qquad \text{b. } \binom{n}{2} \qquad \text{c. } \binom{n}{3}$$

Exercice 6 – À l'aide du triangle de Pascal, donner la valeur des coefficients binomiaux

$$\binom{6}{k} \qquad \text{pour tout } k \in \{0,\dots,6\}$$

Exercice 7 – Trouver un moyen efficace pour calculer les nombres suivants.

$$\text{a. } \binom{8}{4}+\binom{8}{5} \qquad \text{b. } \binom{10}{3}+2\binom{10}{4}+\binom{10}{5}$$

Exercice 8 – Simplifier au maximum les quantités suivantes.

$$\text{a. } \frac{n!}{(n+1)!} \qquad \text{b. } \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \qquad \text{c. } \frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n}{1}} \qquad \text{d. } \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-1}{p-1}}$$

Exercice 9 – Lien coefficients binomiaux/factorielles et dénombrement. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Combien existe-t-il d'anagrammes de "Maison", de "Mississipi" et de "Abracadabra" ?
2. Dans un groupe de n personnes, tout le monde se serre la main. Quel est le nombre de poignées de mains ? *On pourra commencer par comprendre ce qu'il se passe pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$,...*
3. Quatre athlètes participent à une finale olympique. Combien de classements sont possibles pour cette finale.

Exercice 10 – Lien coefficients binomiaux et dénombrement. On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Combien de tirages vérifient les conditions suivantes ?

1. Aucune condition supplémentaire.
2. Il y a au moins une carte pique parmi les cinq cartes.
3. Il y a exactement deux valets.
4. Il y a exactement un as et deux carreaux.
5. Les cinq cartes sont de la même couleur.

Autour du binôme de Newton

Exercice 11 – Développement. Soient $x, a, b \in \mathbb{R}$. Développer les quantités suivantes

a. $(a+b)^6$ b. $(2-x)^5$ c. $(2x+1)^4$ d. $(x^2+2)^3$

Exercice 12 – Calcul de somme.

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du binôme de Newton, calculer la somme suivante
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la question précédente, calculer les sommes suivantes
$$1.\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k, \qquad 2.\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad 3.\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Vers les probabilités finies...

Exercice 13 – Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer le nombre d'issues total et le nombre d'issues correspondant à l'obtention de deux boules de numéro paire dans chacun des trois cas.

1. On tire les deux boules l'une après l'autre, sans remettre dans l'urne la première boule tirée (tirage sans remise avec ordre).
2. On tire une boule et on la remet avant de tirer la deuxième boule (tirage avec remise avec ordre).
3. On tire les deux boules simultanément (tirage sans remise et sans ordre).

Exercice 14 – On lance deux fois un dé à six faces (tirage avec remise). On s'intéresse aux deux valeurs prises par le dé (dans l'ordre des deux lancers).

1. Donner le nombre d'issues total.
2. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 6.
3. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 7.
4. Donner le nombre d'issues total conduisant à l'obtention d'une somme des deux lancers égale à 6 et en ayant obtenu à 4 au premier lancer.

Exercice 15 – À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 9 touches : $1, 2, \ldots, 9$. Le code d'ouverture de la porte est composé d'un nombre de quatre chiffres. *Un code à quatre chiffres peut être vu comme le choix successifs de quatre nombres compris entre 1 et 9. Avec ce point de vue, on peut représenter la situation grâce à un arbre de probabilité.*

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Le code a été changé et choisi au hasard.
   (a) Combien de codes comportent au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) Combien de codes ne comportent que des chiffres pairs ?
   (c) Combien de codes comportent que quatre chiffres différents ?

Exercices supplémentaires

Exercice 16 – Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme suivante

$$\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$$

On pourra faire apparaître un télescopage.

Exercice 17 – EML 2018, Maths S. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, le polynôme P_j par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_j(x) = x^j (1-x)^{n-j}$$

1. Calculer
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j.$$
2. Montrer que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_j(x) = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} x^i$$

Exercice 18 – Autour de la loi binomiale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On pose,

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$
2. (a) Montrer que
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} k \times p_k = np$$
3. (a) Montrer que
$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, \qquad k^2 \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + k \binom{n}{k}$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \times p_k = np + n(n-1)p^2$$

Exercice 19 – EDHEC 2018, Maths S. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose,

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \qquad \text{et} \qquad T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$$

1. Calculer $S_p + T_p$.
2. Montrer que $S_p = T_p$.
3. En déduire la valeur de S_p.

Exercice 20 – Inspiré d'un sujet de concours. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $n = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs de la manière suivante.

- Lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

1. Soit $i \in \{2, \ldots, k-1\}$. Si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, combien de boules noires restent-t-il dans l'urne ? combien de boules au total restent-t-il dans l'urne ?
2. Si les $k-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, combien de boules noires restent-t-il dans l'urne ? combien de boules au total restent-t-il dans l'urne ?