TD 17 – Continuité d'une fonction

Étude de la continuité

Exercice 1 – *[S'inspirer des Exemples 1.9 et 1.9, Chapitre 17]*
Étudier la continuité des fonctions suivantes:

1. $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

2. $h: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \end{cases} \end{array}$

3. $g: \begin{array}{ccl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}$

4. $i: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \end{array}$

1. Étude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ par composition, car $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
   - De même, la fonction f est continue sur $]-\infty,0[$.
   - Il reste à étudier la continuité de f en 0. Par composition,
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(1).$$
   Donc la fonction f n'est pas continue en 0.
2. Étude de la continuité de h sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction h est bien définie et continue sur $]-\infty,\frac{2}{3}[$ par composition, car, pour tout $x \in]-\infty,\frac{2}{3}[$, $-3x+2 \geqslant 0$, $x \mapsto -3x+2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   - La fonction h est continue sur $]\frac{2}{3},+\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
   - Il reste à étudier la continuité de h en $\frac{2}{3}$. Par composition, et continuité de la racine carrée,
   $$\lim_{x\to\frac{2}{3}} h(x) = \sqrt{-3\times\frac{2}{3}+2} = 0 = h\left(\frac{2}{3}\right) = 0.$$
   Donc la fonction f est continue en $\frac{2}{3}$.
3. Étude de la continuité de g sur $[1,+\infty[$.
   - La fonction g est bien définie et continue sur $]1,2[$ par composition, car pour tout $x \in]1,2[$, $x-1>0$, $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme est continue sur $]0,+\infty[$.
   - La fonction g est continue sur $]2,+\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
   - Étudions la continuité de g en 1. Par composition,
   $$\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty \neq g(1).$$
   Donc la fonction g n'est pas continue en 1.
   - Étudions la continuité de f en 2. Par composition et continuité du logarithme,
   $$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \ln(1) = 0 = g(2) = 0.$$
   Donc la fonction g est continue en 2.
4. En utilisant la définition de la valeur absolue, on peut simplifier l'expression de i de la manière suivante :
   $$i: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -1 & \text{si } x < -2 \end{cases} \end{array}$$
   Donc, on peut montrer que la fonction i est continue sur $]-\infty,-2[$ sur $]-2,+\infty[$ mais n'est pas continue en -2.

Exercice 2 – Prolongement par continuité. *[S'inspirer des Exemples 1.16, 1.17 et 1.18, Chap 17]*
On considère la fonction
$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

La fonction racine carrée étant définie sur $[0,+\infty[$ et la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, par produit, la fonction f est définie sur $\mathscr{D}_f =]0,+\infty[$.

b) Justifier que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

La fonction racine carrée étant continue sur $[0,+\infty[$ et la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, par produit, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Déterminer la limite de f en 0.

Par croissances comparées, on a
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

d) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

Comme la fonction f admet une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité. Son prolongement par continuité est donné par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 3 – Théorème des valeurs intermédiaires. *[S'inspirer de l'Exemple 2.5, Chapitre 17]*
On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{3x} + x$$

Montrer que l'élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre 0 et 1.

On cherche à montrer que l'élément $1+e^2$ admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre 0 et 1, c'est-à-dire, on cherche à montrer que

$$\exists x \in [0,1], \quad f(x) = 1 + e^2.$$

Geste invisible : On veut prendre $a = 0$, $b = 1$ et $k = 1 + e^2$ dans le TVI (v2). Tout d'abord, en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier,

① la fonction f est **continue** sur $[0,1]$.

Par ailleurs, $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 + e^3$. Donc, comme $1 + e^2 \in [f(0), f(1)]$, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 1 + e^2$. Autrement dit, l'élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre 0 et 1.

Exercice 4 – Théorème des valeurs intermédiaires. *[S'inspirer de l'Exemple 2.7, Chapitre 17]*
On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x} - x^2$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Geste invisible : On veut prendre $a = -\infty$ et $b = \infty$ dans le TVI (v4). On a :

① la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
② $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi appliquer le TVI (v3) avec $a = 0$ et $b = 1$ car $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$.

Exercice 5 – Théorème de la bijection. *[S'inspirer de l'Exemple 2.21, Chapitre 17]*
On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x} + x$$

1. Dresser le tableau de variation de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - e^{-x}.$$

On a

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

De même,

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0.$$

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ dans un intervalle à déterminer. On note φ la bijection réciproque associée.

① La fonction f est définie sur l'**intervalle** $]-\infty, 0]$.
② La fonction f est **continue** sur $]-\infty, 0]$.
③ D'après la question précédente, la fonction f est **strictement décroissante** sur $]-\infty, 0]$.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[f(0), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[= [1, +\infty[$. Notons φ sa bijection réciproque.

3. Dresser le tableau de variation de φ.

- La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
- De plus, $f(0) = 1$ donc $\varphi(1) = 0$.
- Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

On peut alors tracer le tableau de variations de φ.

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
φ	0 $\searrow$ $-\infty$

Exercice 6 – Théorème de la bijection. *[S'inspirer de l'Exemple 2.22, Chapitre 17]*

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xe^{-x} - 1 < 0.$$

Pour cela, on introduit la fonction suivante
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{-x} - 1 \end{array}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$e^{-1}-1$	$\searrow$	-1

Comme $e^{-1} - 1 < 0$ car $e^1 > 1$, on en déduit que $g(x) < 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire
$$\forall x > 0, \quad xe^{-x} - 1 < 0.$$

2. Montrer que l'équation $\ln(x) = \frac{1}{e^x}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

On cherche à montrer
$$\exists x \in]0,+\infty[, \quad \ln(x) - e^{-x} = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - e^{-x} \end{array}$$

① La fonction f est définie sur l'**intervalle** $]0,+\infty[$.
② La fonction f est **continue** sur $]0,+\infty[$.
③ Montrons que la fonction f est **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$.
(P) En utilisant la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - e^{-x} = \frac{1 - xe^{-x}}{x}.$$

(E) L'équation $f'(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. Autrement dit,
$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists! x \in]0,+\infty[, \ f(x) = y.$$

En particulier, il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\ln(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha}$.

3. Montrer que $1 < \alpha < e$.

On a
$$f(\alpha) = 0,$$
et
$$f(1) = -e^{-1} < 0,$$
et,
$$f(e) = 1 - e^{-e} > 0 \qquad \text{car} \qquad -e < 0 \text{ donc } e^{-e} < 1.$$

Finalement, on a
$$f(1) < f(\alpha) < f(e).$$

Or f^{-1} est strictement croissante (car f l'est) donc
$$f^{-1}(f(1)) < f^{-1}(f(\alpha)) < f^{-1}(f(e)),$$
c'est-à-dire
$$1 < \alpha < e.$$

Exercice 7 – Théorème de la bijection. *[S'inspirer de l'Exemple 2.23, Chapitre 17]*

On considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f (limites comprises).

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

On a
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1}$$

De même, par croissance de la fonction exponentielle,
$$f'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant e^{-1}.$$

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

 ① La fonction f est définie sur l'**intervalle** $[\frac{1}{e}, +\infty[$.
 ② La fonction f est **continue** sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.
 ③ D'après la question précédente, la fonction f est **strictement croissante** sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

 Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, +\infty[$ sur $[f(\frac{1}{e}), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-\frac{1}{e}, +\infty[$. Autrement dit,

$$\forall y \in [-\frac{1}{e}, +\infty[, \ \exists! x \in [\frac{1}{e}, +\infty[, \ f(x) = y.$$

 En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in [\frac{1}{e}, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n$.

 De plus, pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = n$ n'a pas de solution dans $]0, \frac{1}{e}[$. Finalement, l'équation $f(x) = n$ admet bien une unique solution dans $]0, +\infty[$.

3. Préciser la valeur de u_0.

 On remarque que $f(1) = 0$. Or, par définition u_0 est l'unique solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$. Donc par unicité, $u_0 = 1$.

4. Comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$. En déduire le sens de monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(u_{n+1}) = n + 1 \geqslant f(u_n) = n$$
 donc, comme f^{-1} est strictement croissante (car f l'est),
$$f^{-1}(f(u_{n+1})) \geqslant f^{-1}(f(u_n))$$
 c'est-à-dire
$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$
 Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{n}$. *On pourra utiliser le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x$.*

 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$f(\sqrt{n}) - f(u_n) = \sqrt{n}\ln(\sqrt{n}) - n = \sqrt{n}(\ln(\sqrt{n}) - \sqrt{n}) \leqslant 0,$$
 car $\sqrt{n} \geqslant 0$ et en utilisant le fait que pour tout $x > 0$, $\ln(x) - x \leqslant 0$. Donc
$$f(\sqrt{n}) \leqslant f(u_n) \qquad \text{et donc} \qquad \sqrt{n} \leqslant u_n.$$

6. Quelle est la limte de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

 Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$ et que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, par minoration, on en déduit que
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$